函數與其圖形

【變數與函數】：

(1)<u>**函數的意義**</u>：

【範例】：

一年有十二個月，每個月的天數不同。在平年中，如果用 x 表示月份，y 表示 x 月份的天數，則 x 與 y 之間的對應關係如下表所示(如果是閏年，2 月份的天數為 29 天)：A 資料為月份，B 資料為天數。

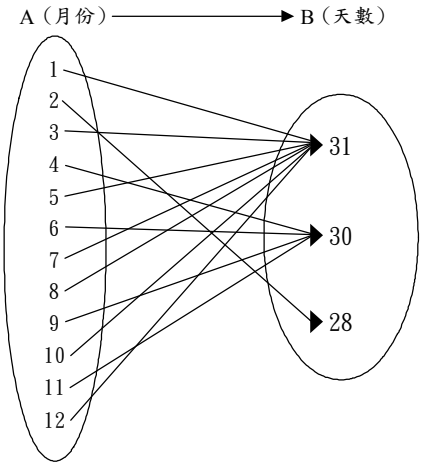
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

(i) 在這個關係中，每一個 x 值都只有一個 y 的對應值。

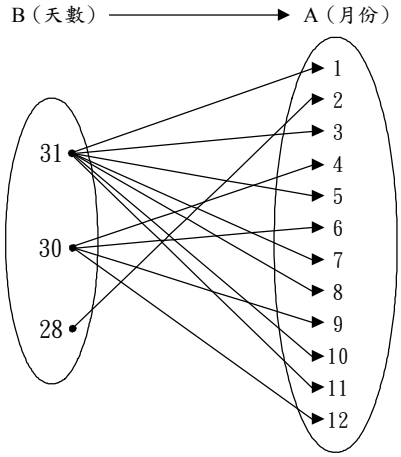
例如： $x=1$ 時，$y=31$；$x=2$ 時，$y=28$；……；$x=12$ 時，$y=31$。

這種對應關係表示 y 為 x 的函數，如左下圖所示：

(ii) 反過來說，當 y 值為 31 時，得到對應的 x 值不只一個，有 1、3、5、7、8、10、12 等七個，所以 x 不是 y 的函數，如右下圖所示：



A對應到B是函數對應關係



B對應到A不是函數對應關係

(2)<u>**函數表示法**</u>：

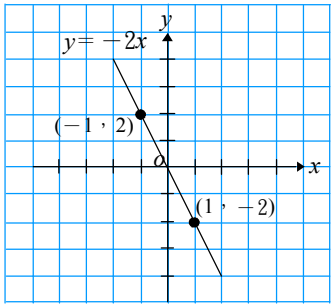
若用 x、y 表示兩個變數，而且對於任何一個 x 的值，恰好有一個 y 值與它對應，我們就說 y 是 x 的函數，x 是自變數，y 是應變數。當 y 是 x 的函數時，常用符號表示成：$y=f(x)$。

例如：方程式 $2x+y=0$ 的圖形。

當 $2x+y=0$ 時可以移項化簡成 $y=-2x$

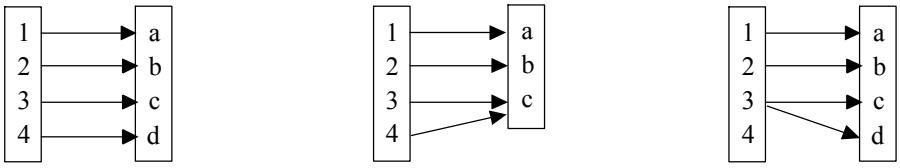
圖形如右圖所示：

y 是 x 的函數，也就是 $y=f(x)=-2x$。



(3)**函數的判別法則**：

函數對應關係的判斷法則，可以用下圖來表示：



一對一函數　　多對一函數(或一對無)　　不是函數

(4)**函數值**：

【範例】：設 $g(x)=\dfrac{10}{x}$，求 g(5)與 g(10)的值。

解　：因為 $g(x)=\dfrac{10}{x}$，所以 $g(5)=\dfrac{10}{5}=2$，$g(10)=\dfrac{10}{10}=1$。

【函數圖形】：

(1)**線性函數圖形**：

(i) **一次函數**：

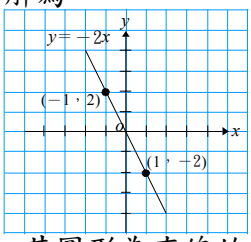
$f(x)=ax+b$，$a\neq 0$ 時，這種函數就叫做**一次函數**。(即 y 是 x 的一次函數)

例如：$f(x)=5x$，$g(x)=50-3x$ 都是一次函數；

【範例】：試畫出一次函數 $y=f(x)=-2x$ 的圖形。

解　：對函數 $y=f(x)=-2x$ 時的圖形，先找出兩組方程式的解為：

x	-1	1
y	2	-2



再將兩點描到座標平面上，再將兩點連接成一條直線，

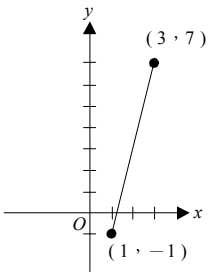
則此直線即為函數 $y=f(x)=-2$ 的圖形。

※注意：當一次函數：$y=f(x)=ax+b$ 中的 x 值有限制的時候，其圖形為直線的一部分，為一條線段或某些點。

【範例】：設一次函數 $y=f(x)=4x-5$，且 $1\leq x\leq 3$，請畫出它的圖形。

解　：取函數 $y=f(x)=4x-5$ 的兩組端點的對應值如下：

x	1	3
y	-1	7



(ii) **常數函數**：

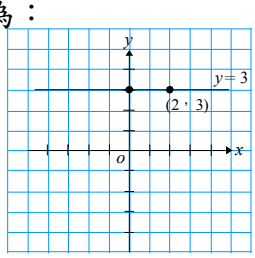
$f(x)=ax+b$ 中，$a=0$ 時，$f(x)=b$，這種函數就叫做**常數函數**。

例如：$f(x)=5$，$g(x)=-2$，$f(x)=0$ 都是常數函數，其圖形都是 x 軸或與 x 軸平行的直線。

【範例】：試畫出常數函數 $y=f(x)=3$ 的圖形。

解　：對函數 $y=f(x)=3$ 時的圖形，先找出兩組方程式的解為：

x	0	2
y	3	3



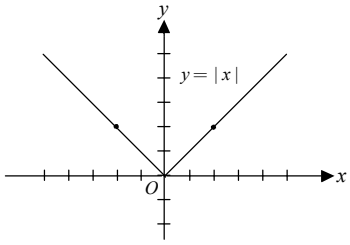
再將兩點描到座標平面上，再將兩點連接成一條直線，則此直線即為函數 $y=f(x)=3$ 的圖形。

(2)<u>**絕對值的函數圖形**</u>：

例如：方程式 $y=|x|$ 的圖形，即為絕對值的函數圖形。

方程式 $y=|x|$，其圖形如下圖所示：

y 是 x 的函數，也就是 $y=f(x)=|x|$。

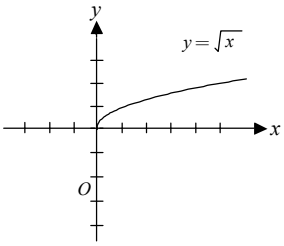


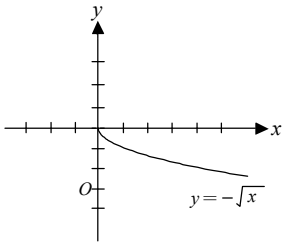
(3)<u>**平方根的函數圖形**</u>：

例如：方程式 $y=\sqrt{x}$，$y=-\sqrt{x}$ 的圖形，即為平方根的函數圖形。

方程式 $y=\sqrt{x}$，$y=-\sqrt{x}$，其圖形如下圖所示：

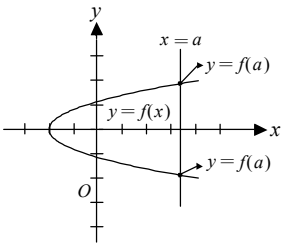
y 是 x 的函數，也就是 $y=f(x)=\sqrt{x}$，$y=f(x)=-\sqrt{x}$。





(4)<u>**不是函數的函數圖形**</u>：

如右圖所示，若方程式 $x=y^2-2$（即 $y=\pm\sqrt{x+2}$），如果 $x=a$ 代入，會跑出兩個根(解)，則此方程式不是函數。



【二次函數的圖形討論與作圖】：

二次函數 $y=ax^2+bx+c$：

(1) 利用配方法將 $y=ax^2+bx+c$ 推演成 $y=a(x-h)^2+k$ 來找出頂點座標(h，k)，然後即可描繪其圖形，並且得其最大(小)值。

$$y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

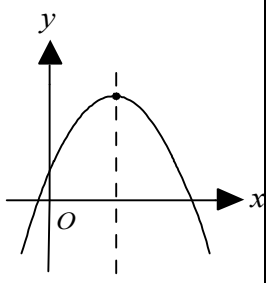
因此可得知 $y=ax^2+bx+c$ 的頂點座標為$(-\frac{b}{2a}，-\frac{b^2-4ac}{4a})$。

（2） $y=ax^2+bx+c$ ，對稱軸為 $x+\dfrac{b}{2a}=0$。

(i) $a>0$ 時： a. 開口向上；(如圖一)

b. 當 $x=-\dfrac{b}{2a}$ ，y 有最小值 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ ；

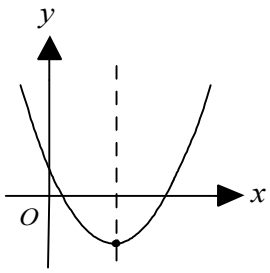
c. 頂點（$-\dfrac{b}{2a}$，$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$），為最低點(最小值)。 （圖一）



(ii) $a<0$ 時： a. 開口向下；(如圖二)

b. 當 $x=-\dfrac{b}{2a}$ ，y 有最大值 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ ；

c. 頂點（$-\dfrac{b}{2a}$，$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$），為最高點(最大值)。 （圖二）



【二次函數圖形之平移】：

（1）對方程式 $y=a(x-h)^2+k$ 而言，若 $h>0$， $k>0$，則有下列四種情形：

(i) 把 $y=ax^2$ 的圖形向右平移 h 單位，向上平移 k 單位，
得到 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形。

(ii) 把 $y=ax^2$ 的圖形向右平移 h 單位，向下平移 k 單位，
得到 $y=a(x-h)^2-k$ 的圖形。

(iii) 把 $y=ax^2$ 的圖形向左平移 h 單位，向上平移 k 單位，
得到 $y=a(x+h)^2+k$ 的圖形。

(iv) 把 $y=ax^2$ 的圖形向左平移 h 單位，向下平移 k 單位，
得到 $y=a(x+h)^2-k$ 的圖形。

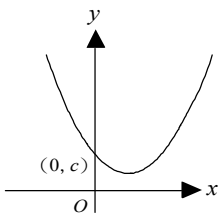
【二次函數與兩軸交點之討論】：

（1）若 $a\neq 0$， $y=ax^2+bx+c$ 圖形與 y 軸的交點：

$y=ax^2+bx+c$

令 $x=0 \Rightarrow y=c$，即與 y 軸交於(0，c)，如(圖一)。

令 $y=0 \Rightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ab}}{2a}$



（圖一）

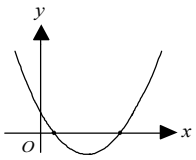
（2）若 $y=0$ 且 $a\neq 0$，$y=ax^2+bx+c$ 圖形與 x 軸的交點：

(i) 當判別式 $b^2-4ac>0$：

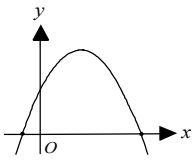
a. 方程式根為兩相異實根，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ab}}{2a}$。

b. 圖與 x 軸的交點為相異兩交點。

c. $a>0$（開口向上，如圖二）； $a<0$（開口向下，如圖三）。



（圖二）



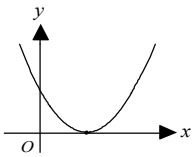
（圖三）

(ii) 當判別式 $b^2-4ac=0$：

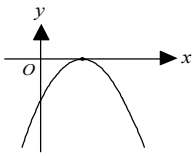
a. 方程式根為兩相等實根，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ab}}{2a}=\dfrac{-b}{2a}$。

b. 圖與 x 軸的交點為相切(一交點)。

c. $a>0$（開口向上，如圖四）； $a<0$（開口向下，如圖五）。



（圖四）



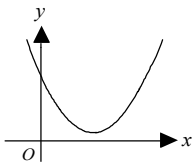
（圖五）

(ii) 當判別式 $b^2-4ac<0$：

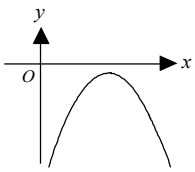
a. 方程式根無實根。

b. 圖與 x 軸無交點。

c. $a>0$（開口向上，如圖六）； $a<0$（開口向下，如圖七）。



（圖六）



（圖七）

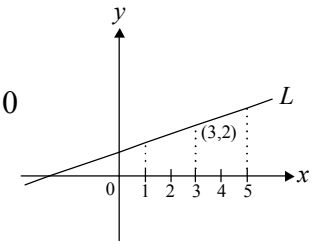
1. 如右圖，L 為一次函數 $y=f(x)$ 的圖形，今將函數 f 的自變數與應變數間的對應關係列在表(二)。

表(二)

自變數 x	…	0	1	3	5	…
應變數 $f(x)$	…	a	b	c	d	…

請問對於下列有關 a、b、c、d 大小的判斷中，何者錯誤？【91.基本學測一】

(A) $a=0$　(B) $b>0$　(C) $c=2$　(D) $d>2$



重點：在一次函數中，由斜率決定大小 y 值的大小

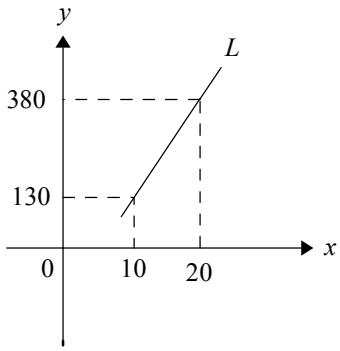
如右圖：$x=0$ 時，$y=f(0)>0 \Rightarrow a>0$；$x=1$ 時，$y=f(1)>0 \Rightarrow b>0$

$x=3$ 時，$y=f(3)=2=c$；$x=5$ 時，$y=f(5)>2 \Rightarrow d>2$

答案選（A）

2. 如右圖，設直線 L 為函數 $f(x)=ax+b$ 的圖形，請問 $f(0)=$？

(A) -65　(B) -120　(C) -130　(D) -250



重點：先算出直線方程式再代入點　【91.基本學測二】

直線 L 通過 $(10,130)$、$(20,380)$ 兩點

將 $(10,130)$、$(20,380)$ 代入 $y=ax+b$

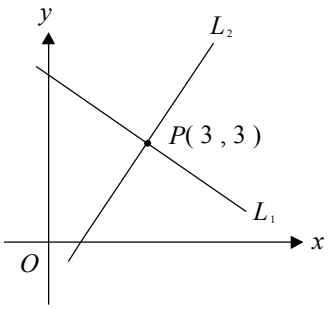
可得 $\begin{cases} 130=10a+b & \wedge \quad (1) \\ 380=20a+b & \wedge \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=25 \\ b=-120 \end{cases} \Rightarrow y=f(x)=25x-120$，$f(0)=-120$。

答案選（B）

3. 如右圖，在坐標平面上，L_1 為 $y=f(x)$ 的一次函數圖形，L_2 為 $y=g(x)$ 的一次函數圖形，L_1、L_2 相交於 $P(3,3)$。若 $a>3$，則下列敘述何者正確？【92.基本學測一】

(A) $f(a)-g(a)=a$　(B) $f(a)-g(a)=3$

(C) $f(a)=g(a)$　(D) $f(a)<g(a)$



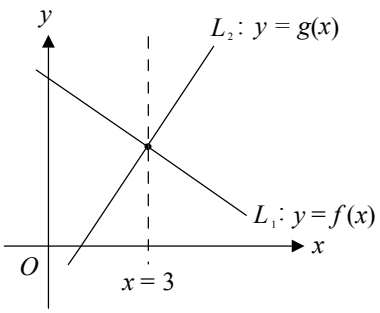
重點：直角坐標與直線

(1) 在 $x=3$ 時，$f(x)=g(x)$

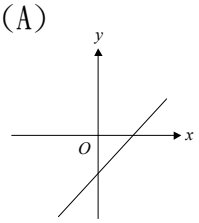
(2) 在 $x<3$ 時，$f(x)>g(x)$

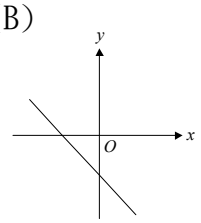
(3) 在 $x>3$ 時，$f(x)<g(x)$

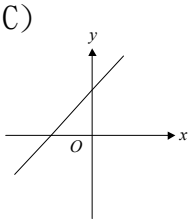
答案選（D）

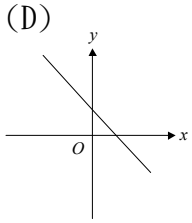


4. 若一次函數 $f(x)=ax-3$，其中 $a>0$，則下列哪一個選項可能是此函數圖形？

(A)


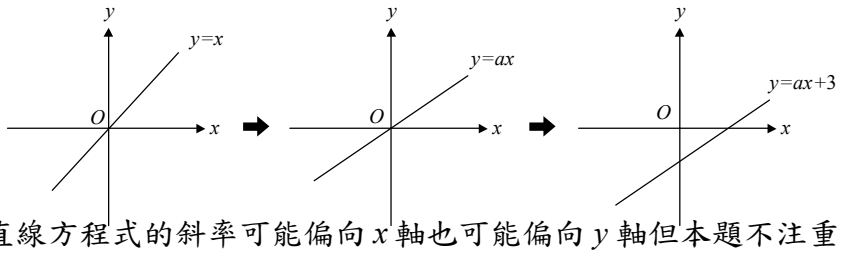
(B)


(C)


(D)


重點：一次函數的平移 【92.基本學測二】

雖然題目為一次函數，但寫成 $y=ax+3$ 即可說是直線方程式。



直線方程式的斜率可能偏向 x 軸也可能偏向 y 軸但本題不注重。

答案選（A）

5. 已知線型函數 $f(x)=ax+b$，其對應關係如附表(一)。求 $\beta+\gamma=$？【92.基本學測二】

(A) 4　(B) 6　(C) 8　(D) 12

表(一)

$f(x)$	…	1	β	3	γ	…
	…	3		3		…

重點：直角坐標與直線

將 $f(1)=3$，$f(3)=3$ 代入 $f(x)=ax+b$

$\Rightarrow \begin{cases} 3=a+b \\ 3=3a+b \end{cases} \Rightarrow 2a=0 \Rightarrow a=0$ 代入得 $b=3 \Rightarrow f(x)=3$

$\therefore \beta$，γ 也等於 3，故 $\beta+\gamma=3+3=6$

答案選（B）

6. 坐標平面上，函數 $y=f(x)$ 的圖形經過 $(-1,4)$、$(0,3)$、$(1,0)$、$(2,1)$、$(3,2)$、$(4,7)$ 六個點，求 $f(-1)+f(1)+f(2)+f(4)$ 的值為何？ 【93 年第一次基測】

(A) 4　(B) 6　(C) 8　(D) 12

重點：坐標平面上所對應的點

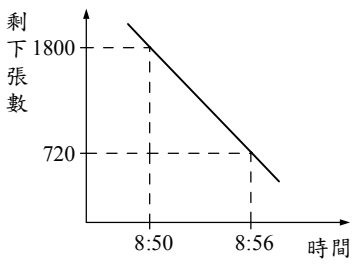
經過 $(-1,4)$、$(1,0)$、$(2,1)$、$(4,7)$

$f(-1)=4$，$f(1)=0$，$f(2)=1$，$f(4)=7$

$f(-1)+f(1)+f(2)+f(4)=4+0+1+7=12$

答案選（D）

7. 右圖為小美影印資料時剩下張數和時間的關係圖。利用圖中所提供的數據，推估小美在 9：00 時影印的情形是下列哪一種？【93. 基本學測一】



(A) 來不及印完　　(B) 剛好印完

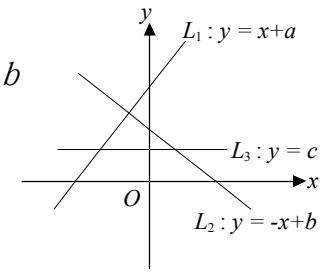
(C) 提前一分鐘印完　　(D) 提前半分鐘印完

重點：線性函數的應用

每分鐘平均印 $\dfrac{1800-720}{56-50}=\dfrac{1080}{6}=180$(張)，在 9：00 時，剩下張數為 $720-180\times 4=0$

答案選 (B)

8. 如右圖，直線 L_1、L_2、L_3 分別為方程式 $y=x+a$、$y=-x+b$、$y=c$ 的圖形，下列有關 a、b、c 大小關係的敘述何者正確？【93. 基本學測二】



(A) $a>b>c$　　(B) $b>a>c$　　(C) $b>c>a$　　(D) $a>c>b$

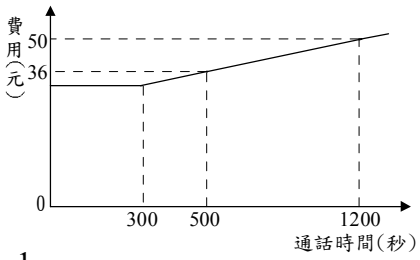
重點：與 y 軸交點的大小比較

L_1 : 令 $x=0\Rightarrow y=a>0$，L_3 : 令 $x=0\Rightarrow y=c>0$

L_2 : 令 $x=0\Rightarrow y=b>0$，由圖知 $a>b>c$。

答案選 (A)

9. 右圖是某電信公司的通話費計算方式：300 秒以內只繳基本費，超過 300 秒之後的費用，與通話時間成線型函數關係。則基本費是多少元?



(A) 26　　(B) 28　　(C) 32　　(D) 34

重點：二元一次的列式求解　　【93. 基本學測二】

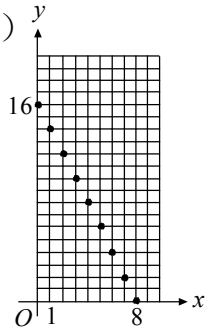
假設此線性函數為 $y=ax+b$，將 (500，36)，(1200，50)

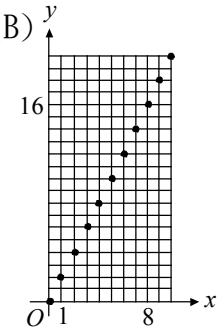
$\begin{cases}36=500a+b\\50=1200a+b\end{cases}\Rightarrow\ 700a=14\ \Rightarrow\ a=\dfrac{1}{50}\quad b=36-500\times\dfrac{1}{50}=26$，

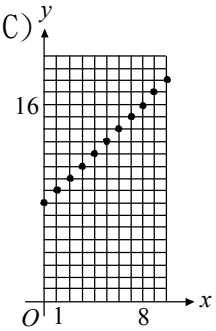
可得超過 300 秒後的關係式為 $y=\dfrac{1}{50}x+26$　　$\therefore$ 基本費 $=\dfrac{1}{50}\times 300+26=32$ (元)

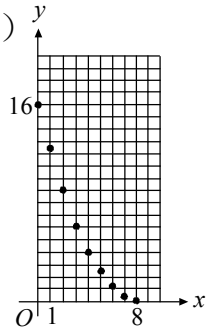
答案選 (C)

10. 將兩兄妹的年齡分別以 y、x 表示。若在 2004 年時，兄妹兩人的年齡分別為 16 歲、8 歲，則下列哪一個圖形為兩人年齡的關係圖？ 【94 年第一次基測】

(A)


(B)


(C)


(D)


重點：直線函數關係圖

x	9	8	7	6	...	0
y	17	16	15	14	...	8

答案選（C）

11. x、y 兩變數的關係如下，何者 y 不是 x 之函數？

(A)

x	1	2	3	4
y	0	0	0	0

(B)

x	1	2	3	1
y	-1	3	4	2

(C)

x	-1	0	1	2
y	-1	0	1	2

(D)

x	1	2	3	4
y	3	4	5	6

重點：函數的定義

(B) $x=1$ 則 $\begin{cases} y=-1 \\ y=2 \end{cases}$，對 $x=1$ 而言有兩個 y 值與之對應。 ∴不為函數

其他(A)(C)(D)“對應 x 的 y 值均只有一個”此種關係，即為函數關係

答案選（B）

12. 阿木班上某次平時考成績低落，老師用線型函數 $y=ax+b$ 來加分，原始分數為 x 分，調整後的分數為 y 分，結果使原來32分的同學變成63分，40分的同學變成75分，若阿木調整後的分數為90分，則他的原始分數為幾分？

(A) 50 (B) 51 (C) 52 (D) 53

重點：線型函數的應用

以 $(32，63)$、$(40，75)$ 代入 $y=ax+b$，$\begin{cases} 63=32a+b \\ 75=40a+b \end{cases}$，解之得 $a=\dfrac{3}{2}$，$b=15$。

所以其線型函數為 $y=\dfrac{3}{2}x+15$。再以 $y=90$ 代入即得 $x=50$。

答案選（A）

13. 兩個線型函數 $f(x)=x+1$ 、 $g(x)=-3x+5$ 圖形的交點為 P 點，則 $f(x)$ 、 $g(x)$ 的圖形與 x 軸所圍成的三角形面積為何？

(A) $\frac{11}{4}$　(B) $\frac{7}{4}$　(C) $\frac{8}{3}$　(D) $\frac{5}{3}$　平方單位

重點：線性函數的交點圖形之面積

$\begin{cases} y=x+1 \\ y=-3x+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow$ 交點為 $P(1，2)$

$f(x)$ 、 $g(x)$ 的圖形與 x 軸的交點坐標分別為 $(-1，0)$ 、 $(\frac{5}{3}，0)$

則三角形的面積 $=[\frac{5}{3}-(-1)]\times 2\div 2=\frac{8}{3}$ (平方單位)

答案選（C）

14. 設線型函數 $f(x)=ax+b$ ，其圖形通過 $(6，-7)$ ，且和直線 $4x-5y=30$ 平行，則 $f(1)$ 之值為何？

(A) -17　(B) -11　(C) -5　(D) 1

重點：線型函數的平行性質

$4x-5y=30 \Rightarrow y=\frac{4}{5}x-6 \Rightarrow a=\frac{4}{5}$ ，設 $f(x)=\frac{4}{5}x+b$

以 $(6，-7)$ 代入得 $-7=\frac{4}{5}\times 6+b \Rightarrow b=-\frac{59}{5}$ ，得 $f(x)=\frac{4}{5}x-\frac{59}{5}$

$\Rightarrow f(1)=\frac{4}{5}-\frac{59}{5}=-\frac{55}{5}=-11$

答案選（B）

15. 某電器行賣大、中、小三種冰箱，原來的售價為大冰箱25000元，中冰箱18000元，小冰箱9000元，今想用一個線型函數 $y=ax+b$ 來調低售價，冰箱原來售價 x 元，調低後售價 y 元，已知降價後中冰箱賣15200元，小冰箱賣7100元，請問大冰箱調低售價後應賣多少元？

(A) 21500　(B) 21300　(C) 21100　(D) 20900

重點：等差級數的應用

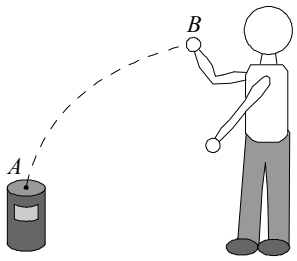
以 $(18000，15200)$ 、 $(9000，7100)$ 代入 $y=ax+b$

$\begin{cases} 15200=18000a+b \\ 7100=9000a+b \end{cases}$

解之得 $a=\dfrac{9}{10}$ ，$b=-1000$ ，所以 $y=\dfrac{9}{10}x-1000$ ，$x=25000$ 代入即得 $y=21500$

答案選（A）

16. 如右圖，小智丟垃圾的路徑是一個二次函數 $y=-\dfrac{1}{3}x^2+2x+c$ 的圖形。已知小智是在此二次函數圖形的頂點（即 B 點）將垃圾丟出，且從 $A(0,1)$ 點進入筒內。若 B 點的坐標為 (a,b)，則 $b=$？【90.基本學測二】



(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

重點：利用配方法求二次函數頂點坐標

將 $(0，1)$ 代入二次函數 $y=-\dfrac{1}{3}x^2+2x+c \quad \Rightarrow \quad 1=c$

$$y=-\frac{1}{3}x^2+2x+1=-\frac{1}{3}(x^2-6x)+1=-\frac{1}{3}(x^2-6x+9)+1+\frac{1}{3}\times 9=-\frac{1}{3}(x-3)^2+4$$

故 B 為 $(3，4) \quad \Rightarrow \quad b=4$

答案選（B）

17. 有三個二次函數，甲：$y=x^2$，乙：$y=x^2+2x-1$，丙：$y=-x^2$，下列哪一個敘述是正確的？【90.基本學測二】

(A)甲的圖形經適當的平行移動後，可與乙的圖形重疊在一起

(B)甲的圖形經適當的平行移動後，可與丙的圖形重疊在一起

(C)乙的圖形經適當的平行移動後，可與丙的圖形重疊在一起

(D)甲、乙、丙三個圖形經適當的平行移動後，都可重疊在一起

重點：二次函數圖形的比較

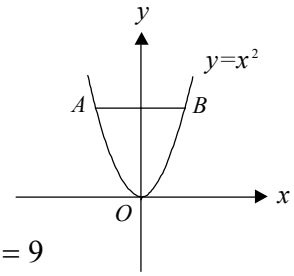
甲：$y=x^2$ ；　乙：$y=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$ ；　丙：$y=-x^2$。

(1) 乙函數是由甲函數向左平移 1 單位，再向下平移 2 單位形成的，
　而開口方向何開口大小皆未改變

(2) 丙函數與甲、乙函數開口方向不同，故與甲、乙兩函數無法經由平移而重疊。

答案選（A）

18. 如右圖，A、B分別為$y=x^2$上兩點，且$\overline{AB}\perp y$軸。若$\overline{AB}=6$，則直線AB的方程式為何？【91.基本學測二】



(A) $y=3$　(B) $y=6$　(C) $y=9$　(D) $y=36$

重點：二次函數的對稱軸

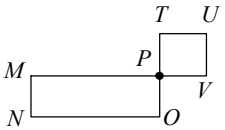
$y=x^2$的對稱軸　$\Rightarrow$　y軸

$\because \overline{AB}=6$；$A(-3,9)$；$B(3,9)$。 $\therefore$直線AB的方程式為：$y=9$

答案選（C）

19. 如下圖(一)，在長度為28的$\overline{AB}$上取一點P。用$\overline{AP}$圍成一個長方形$PMNO$，其中$\overline{PM}=3\overline{PO}$，再用$\overline{BP}$圍成一個正方形$PVUT$，如圖(二)。已知$\overline{PO}=t$時，長方形與正方形的面積和有最小值$s$，則$s=$？【91.基本學測二】

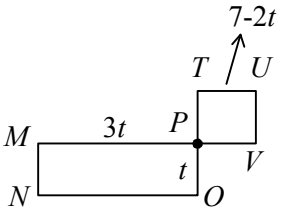
圖(一)



圖(二)

(A) 14　(B) 21　(C) 28　(D) 49

重點：二次函數的極值



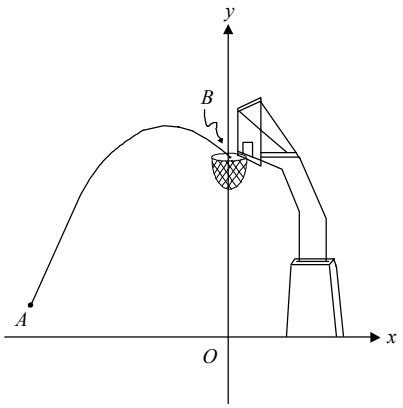
$\overline{AP}=8t$；$\overline{PB}=28-8t$　$\Rightarrow$　正方形$PVUT$邊長$=7-2t$

$s=3t^2+(7-2t)^2=7t^2-28t+49\ =7(t-2)^2+21$

s的最小值為21

答案選（B）

20. 如右圖是一坐標平面。已知籃框位置B點在y軸上，金有一選手將球從A點的位置投出，球經過的路徑是拋物線，由B點空心進球。若此拋物線是下列某一函數的圖形，則此函數為何？【92.基本學測二】



(A) $y=6-\frac{1}{2}(x+2)^2$　(B) $y=6-\frac{1}{2}(x-2)^2$

(C) $y=6+\frac{1}{2}(x-2)^2$　(D) $y=6+\frac{1}{2}(x+2)^2$

重點：由圖形判斷二次函數的方程式

(1) 對稱軸為$x=-2$　$\Rightarrow$　$x+2=0$才合理，開口向下。

(2) $\therefore$ 對照$y=a(x-h)^2+k$判斷其中$a<0$，$h<0$，$k>0$。

(3) 因為籃框位置B點在y軸上，且可由選項推得$a=-\frac{1}{2}$，$h=-2$，$k=6$，

故其函數為 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+6$。

答案選（A）

21. 下列哪一個二次函數，其圖形和 $y=4x^2-8x$ 的圖形有相同頂點？【93.基本學測二】

（A） $y=2x^2-4x$ （B） $y=-2(x+1)^2$ （C） $y=2(x+1)^2+4$ （D） $y=-2(x+1)^2-4$

重點：配方法與二次函數的頂點

$y=4x^2-8x=4[(x^2-2x+1)-1]=4[(x-1)^2-1]=4(x-1)^2-4$。∴頂點（ 1，－ 4 ）

（A） $y=2[(x^2-2x+1)-1]=2(x-1)^2-2$，∴頂點（ 1，－ 2 ）

（C） 頂點（ －1，4 ）。 （D） 頂點（ 1，－ 4 ）。

答案選（D）

22. 下列哪一個二次函數圖形的開口最小？

(A) $y=-x^2$ (B) $y=-3x^2$ (C) $y=2x^2$ (D) $y=x^2$

重點：二次函數圖形開口大小的比較

(i) 當 x^2 的係數的絕對值越大，則函數圖形的開口越小。

(ii) 當 x^2 的係數的絕對值越小，則函數圖形的開口越大。

答案選（B）

23. 函數 $y=2x^2+8x-23$ 可化成 $y=a(x+h)^2+k$ 的形式，則 $a+h+k$ 為何？

(A) -11 (B) -15 (C) -27 (D) -31

重點：二次函數的配方法

$y=2x^2+8x-23=2(x^2+4x+4)-23-8=2(x+2)^2-31$

$\therefore a=2$，$2h=2$，$k=-31 \Rightarrow a+h+k=2+2-31=-27$

答案選（C）

24. 若二次函數 $y=-3(x+2)^2-6$，則下列何者正確？

(A) y 的最大值是 -2 (B) y 的最小值是 -2 (C) y 的最小值是 -6 (D) y 的最大值是 -6

重點：二次函數的最大值與最小值判別

$y=-3(x+2)^2-6=a(x+h)^2+k$。 $\because a<0$ ， $\therefore y$ 有最大值為 -6

答案選（D）

25. 設x是任意數且$2x^2-4x+y+3=0$，則下列何數不可能是y值？

(A) 0　(B) -1　(C) -2　(D) -3

重點：二次函數的最大值與最小值判別

$y=-2x^2+4x-3=-2(x^2-2x+1)-3+2=-2(x-1)^2-1=a(x+h)^2+k$

$\because a=-2<0$ ， $\therefore y$有最大值為-1 $\Rightarrow$ y不可能是0 。

答案選（A）

26. 若二次函數$y=a(x-3)^2+b$有最大值3，則下列各項何者正確？

(A) $a>b$　(B) $a=b$　(C) $a<b$　(D) a、b無法比較

重點：二次函數的最大值

若$y=a(x-3)^2+b$有最大值3，則$a<0$，$b=3>0$。 $\therefore$ $a<b$

答案選（C）

27. 在坐標平面上，$y=2x^2-8$的圖形經由下列哪一種方式移動後，可得到$y=2(x-5)^2+12$的圖形？

(A) 先向左移 5 單位，再向上移 20 單位　(B) 先向右移 5 單位，再向上移 20 單位

(C) 先向下移 5 單位，再向右移 20 單位　(D) 先向上移 5 單位，再向左移 20 單位

重點：二次函數圖形的平移

$\because$ $y=2x^2-8$與$y=2(x-5)^2+12$有相同的開口方向和開口大小

$\therefore$ $y=2x^2-8$的圖形可經由平移而與$y=2(x-5)^2+12$重疊

由$x\rightarrow(x-5)$，是向右平移 5 單位；由$-8\rightarrow+12$，則是向上平移 20 單位。

答案選（B）

28. 在直角座標平面上將二次函數$y=-3x^2+12x-5$的圖形向左移動 3 單位，再向上移動 2 單位，則其最高點為何？

(A) $(-1,7)$　(B) $(1,5)$　(C) $(5,5)$　(D) $(-1,9)$

重點：二次函數的最大值(最高點)

$y=-3x^2+12x-5=-3(x^2-4x+4)-5+12=-3(x-2)^2+7$ 。

若圖形向左移動3單位，則可得$y=-3(x+1)^2+7$，

若圖形再向上移動2單位，則可得$y=-3(x+1)^2+9$。 $\therefore$最高點為$(-1,9)$

答案選（D）

29. $y=2x^2-12x-31$之圖形的對稱軸方程式為？

(A) $x=3$　　(B) $x=-3$　　(C) $x=6$　　(D) $x=-6$

重點：二次函數的對稱軸

$y=2x^2-12x-31=2(x^2-6x+9)-31-18=2(x-3)^2-49$。

$\therefore$對稱軸為$x-3=0\Rightarrow x=3$

答案選（A）

30. 若$1\le x\le 6$，$y=2x^2-8x+6$的最大值為M，最小值為m，則$M+m=$？

(A) 30　　(B) 29　　(C) 28　　(D) 27

重點：二次函數的最大值與最小值(當x有範圍時)

$y=2x^2-8x+6=2(x^2-4x+4)+6-4=2(x-2)^2+2$。$\therefore x=2$，時$y$有最小值為$-2$。

又$\because 1\le x\le 6\Rightarrow x=1$時，$y=2(1-2)^2-2=0$ $x=6$時，$y=2(6-2)^2-2=30$(最大值)。

$\therefore M+m=30-2=28$

答案選（C）

31. 若二次函數$y=ax^2+4ax-2a^2$有最大值-6，則a之值為何？

(A) -2　　(B) -3　　(C) 2　　(D) 3

重點：二次函數的最大值與最小值

$y=ax^2+4ax-2a^2=a(x^2+4x+4)-2a^2-4a=a(x+2)^2-2a^2-4a$

$\because$有最大值為-6，$\therefore a<0$且$-2a^2-4a=-6$

$\Rightarrow\ a^2+2a-3=0\ \Rightarrow\ (a+3)(a-1)=0\ \Rightarrow\ a=-3$或$1$(正不合)

答案選（B）

32. 若二次函數$y=ax^2+bx+c$之圖形有最高點，其位置在y軸的左方，則點(a,b)在第幾象限？

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

重點：二次函數的圖形

$y=ax^2+bx+c=a(x+\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$。

$\therefore\ a<0$且$-\dfrac{b}{2a}<0\Rightarrow b<0$，$\therefore\ (a,b)$在第三象限。

答案選（C）

33. 設二次函數的圖形通過$(3,-2)$和$(-2,3)$兩點，且y軸是對稱軸，則此二次函數有最大(小)值為何？

(A) 最大值-7　(B) 最大值7　(C) 最小值-7　(D) 最小值7

重點：二次函數的最大值與最小值

$\because$ 二次函數的對稱軸為y軸，即$x=0$。 $\therefore$ 設二次函數為$y=ax^2+k$。

將$(3,-2)$和$(-2,3)$兩點代入得$\begin{cases}-2=9a+k & \Lambda\ (1)\\ 3=4a+k & \Lambda\ (2)\end{cases}$

由$(1)-(2)$可得$-5=5a \Rightarrow a=-1 \Rightarrow k=3-4a=3+4=7$

$\therefore\ y=-x^2+7 \Rightarrow y$有最大值為$7$。

答案選（B）

34. 設$a:b=2:3$，$b:c=2:5$，則$ab+bc-ca-c$的最小值為何？

(A) -1　(B) $-\frac{25}{24}$　(C) $-\frac{13}{12}$　(D) $-\frac{9}{8}$

重點：二次函數的最大值與最小值

$a:b=2:3$，$b:c=2:5 \Rightarrow a:b:c=4:6:15$。 設$a=4t$，$b=6t$，$c=15t$，

$$ab+bc-ca-c=24t^2+90t^2-60t^2-15t=54t^2-15t=54(t^2-\frac{5}{18}t+(\frac{5}{36})^2)-54\times(\frac{5}{36})^2$$

$$=54(t-\frac{5}{36})^2-\frac{25}{24}$$

答案選（B）

35. 若$y=\frac{20}{-x^2-6x+k}$有最小值-5，則k之值為何？

(A) -5　(B) -9　(C) -13　(D) -17

重點：二次函數的最大值與最小值

$$y=\frac{20}{-x^2-6x+k}=\frac{20}{-(x^2+6x+9)+k+9}=\frac{20}{-(x+3)^2+k+9}$$

$\therefore$有最小值-5。 $\Rightarrow \frac{20}{9+k}=-5 \Rightarrow -4=9+k \Rightarrow k=-13$

答案選（C）

36. 座標平面上 $y=-3x^2$ 的圖形向左平移 2 個單位長，再向下平移 7 個單位長，則所得到的新圖形的二次函數為何？

(A) $y=-3(x+2)^2+7$　　(B) $y=-3(x+2)^2-7$

(C) $y=-3(x-2)^2+7$　　(D) $y=-3(x-2)^2-7$

重點：函數圖形的平移

原圖形向左平移 2 個單位長，就得到 $y=-3(x+2)^2$ 的圖形，

再向下平移 7 個單位長，就得到 $y=-3(x+2)^2-7$ 的圖形。

答案選（B）

37. 有一出租公寓有 60 間套房，每月租金 4400 可全部租出，若每間房間每增加 100 元，則平均有一間未租出去，若欲使總收入達到最高時，假設公寓套房有 x 間未租出去，每個房間的租金為 y 元，則 $x+y=$？

(A) 4911　　(B) 5010　　(C) 5109　　(D) 5208

重點：二次函數的的應用問題

$$(4400+100x)(60-x)=264000+6000x-4400x+x^2=-100x^2+1600x+264000$$
$$=-100(x^2-16x+64)+264000+6400=100(x-8)^2+270400$$

$\therefore x=8$，$\Rightarrow$ $y=4400+100\times 8=5200$（元）。 $\therefore$ $x+y=5200+8=5208$。

答案選（D）

38. 已知某二次函數其圖形通過 $(-2,5)$、$(0,-11)$ 兩點，且圖形的對稱軸為 $x=-3$，則此二次函數為何？

(A) $y=-2x^2-12x-11$　　(B) $y=-x^2+6x-12$

(C) $y=-2x^2+12x+11$　　(D) $y=-x^2-6x+12$

重點：求二次函數的圖形

$\because$ 其圖形的對稱軸為 $x=-3$，$\therefore$ 假設此二次函數為 $y=a(x+3)^2+k$。

將 $(-2,5)$、$(0,-11)$ 兩點代入可得 $\begin{cases}5=a\times(-2+3)^2+k\\-11=a\times(0+3)^2+k\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}5=a+k & \Lambda\ (1)\\-11=9a+k & \Lambda\ (2)\end{cases}$

由 $(1)-(2)$ 可得 $16=-8a$ $\Rightarrow$ $a=-2$ $\Rightarrow$ $k=5+2=7$

$\therefore$ 此二次函數為 $y=-2(x+3)^2+7=-2(x^2+6x+9)+7=-2x^2-12x-11$

答案選（A）

39. 已知二次函數 $y=mx^2+nx+1$ 與 x 軸交於一點，且其圖形通過 $(1,1)$，求此二次函數為何？

(A) $y=4x^2+4x+1$　(B) $y=4x^2-4x+1$　(C) $y=x^2+2x+1$　(D) $y=x^2-2x+1$

重點：求二次函數的圖形

將點 $(1,1)$ 代入得 $1=m+n+1 \Rightarrow n=-m$

又其圖形與 x 軸交於一點 $\Rightarrow b^2-4ac=0 \Rightarrow n^2-4m=0 \Rightarrow m^2-4m=0 \Rightarrow m(m-4)=0$

若 $m=0$，則 $n=0$ (不合)；若 $m=4$，則 $n=-4$。$\therefore$ 此二次函數為 $y=4x^2-4x+1$。

答案選（B）

40. 隨你去旅行社招攬環島旅行團，預定人數為36人，每人收費8000元，但若增加一人，則每人減收200元，則應增加 x 人，才能使這個旅行社收到最多錢為 y 元。則 $\frac{y}{x}=$？

(A) 122200　(B) 133300　(C) 144400　(D) 155500

重點：二次函數的的應用問題

$y=(36+x)(8000-200x)=288000+8000x-7200x-200x^2$

$=-200x^2+800x+288000=-200(x^2-4x+4)+288000+800=-200(x-2)^2+288800$

$\therefore$ 增加2人時，可收到最多錢為288800元 $\Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{288800}{2}=144400$

答案選（C）

41. A、B 為數線上的兩點，它們的座標分別為9、-5，在此數線上求一點 P 的座標，使 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 的值為最小。試問最小值為何？

(A) 97　(B) 98　(C) 99　(D) 100

重點：數的推理

設 P 座標為 x，$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=|x-9|^2+|x-(-5)|^2=(x-9)^2+(x+5)^2$

$=x^2-18x+81+x^2+10x+25=2x^2-8x+106$

$=2(x^2-4x+4)-2\times4+106=2(x-2)^2+98$

$\therefore$ 最小值為98。　答案選（B）

42. 下列敘述何者錯誤？

(A) $y=x^2$ 的圖形對稱於軸 y 。

(B) $y=(x+1)^2+2$ 的圖形可由 $y=x^2$ 的圖形向右平移1單位，再向上平移2單位而得。

(C) $y=(2x+1)^2-3$ 圖形的對稱軸為 $2x+1=0$ 。

(D) $a\neq 0$, b , c , d , e 為任意實數，則二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形與 $y=ax^2+dx+e$ 的圖形，可藉由水平與鉛直方向的平移而完全疊合。

重點：二次函數的意義判斷

（B）$y=(x+1)^2+2$ 的圖形可由 $y=x^2$ 的圖形向左平移1單位，再向上平移2單位而得。

答案選（B）

43. 設 $y=f(x)$ 為二次函數，若其圖形通過 $(0,-3)$ 、$(-1,0)$ 、$(1,-8)$ 三點，則 $f(x)$ 為何？

(A) $f(x)=2x^2-3x-3$　　(B) $f(x)=-x^2-3x-4$

(C) $f(x)=-x^2-4x-3$　　(D) $f(x)=-2x^2+3x-4$

重點：求解二次函數

設二次函數為 $y=ax^2+bx+c$ ，則有 $\begin{cases} c=-3 \\ a-b+c=0 \\ a+b+c=-8 \end{cases}$

解得 $a=-1$ ，$b=-4$ ，$c=-3$ ，所以二次函數為 $y=-x^2-4x-3$ 。

答案選（C）

44. 設 $y=f(x)$ 為二次函數，若其圖形通過 $(0,11)$ ，且其頂點為 $(2,3)$ ，則 $f(x)$ 為何？

(A) $y=3(x+2)^2+3$　(B) $y=-(x+2)^2+3$　(C) $y=(x-2)^2+3$　(D) $y=2(x-2)^2+3$

重點：求解二次函數

設二次函數為 $y=a(x-2)^2+3$

則有 $4a+3=11 \quad \Rightarrow \quad a=2$

所以二次函數為 $y=2(x-2)^2+3$

答案選（D）

45. 若二次函數 $y=ax^2+bx-3$ 在 $x=2$ 時有最大值5，則 $a+b=$ ？

(A) 4　(B) -4　(C) 6　(D) -6

重點：二次函數的極大值與極小值

$y=ax^2+bx-3=a(x-2)^2+5=ax^2-4ax+(4a+5)$。所以$\begin{cases} b=-4a \\ -3=4a+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=8 \end{cases}$。

$\therefore a+b=-2+8=6$ ， 答案選（C）。

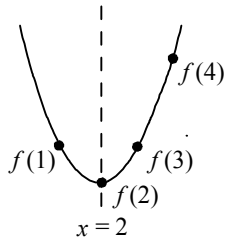
46. a,b 為實數，若二次函數 $f(x)=a(x-2)^2+b$，則 $f(1)$、$f(2)$、$f(3)$ 與 $f(4)$ 之大小關係為何？

(A) $f(2)=f(1)<f(3)<f(4)$　　(B) $f(2)<f(1)=f(3)<f(4)$

(C) $f(2)<f(1)<f(3)=f(4)$　　(D) $f(2)=f(1)=f(3)=f(4)$

重點：由對稱軸來判斷函數值的大小

$\because f(x)=a(x-2)^2+b$，$\therefore$對稱軸為 $x=2$，即 $f(2)$ 為最小值，如右圖。



故 $f(2)<f(1)=f(3)<f(4)$

答案選（B）

47. 若 $y=x^2+2kx+2k$ 的圖形恆在直線 $y=-x-4$ 的上方，則實數 k 的範圍為何？

(A) $-\frac{3}{2}<k<-\frac{1}{2}$　(B) $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$　(C) $-\frac{1}{2}<k<\frac{3}{2}$　(D) $-\frac{3}{2}<k<\frac{5}{2}$

重點：由判別式 $D=b^2-4ac<0$ 求範圍

$\because y=x^2+2kx+2k$ 的圖形恆在直線 $y=-x-4$ 的上方。

$\therefore y=x^2+2kx+2k>-x-4$ 恆成立。即 $x^2+(2k+1)x+(2k+4)>0$ 恆成立(恆正)。

$\therefore (2k+1)^2-4\times1\times(2k+4)<0 \Rightarrow 4k^2-4k-15<0 \Rightarrow (2k+3)(2k-5)<0 \Rightarrow -\frac{3}{2}<k<\frac{5}{2}$。

答案選（D）

48. 設對所有實數 x，二次函數 $f(x)=3x^2-2(m-2)x+(m-2)$ 的函數值恆正，則實數 m 的範圍為何？

(A) $1<m<4$　(B) $2<m<5$　(C) $1<m<3$　(D) $2<m<4$

重點：由判別式 $D=b^2-4ac<0$ 求範圍

因為二次函數 $f(x)=3x^2-2(m-2)x+(m-2)$ 的函數值恆正

所以函數圖形開口向上，且與 x 軸不相交(如右圖)

故有 $a=3>0$ 且 $D=[-2(m-2)]^2-4\times3\times(m-2)<0$

$\Rightarrow\ 4(m-2)^2-12(m-2)<0 \quad \Rightarrow\ 4(m-2)(m-2-3)<0$

$\Rightarrow\ (m-2)(m-5)<0 \quad \Rightarrow\ 2<m<5$　　答案選（B）

49. 若二次函數 $y=3x^2+ax-4a$ 的圖形恆在 $y=ax^2-ax-12$ 圖形的上方，則實數 a 的範圍為何？

(A) $a<2$　(B) $2<a<3$　(C) $2<a<6$　(D) $3<a<6$

重點：由判別式 $D=b^2-4ac<0$ 求範圍

因為 $y=3x^2+ax-4a$ 的圖形恆在 $y=ax^2-ax-12$ 圖形的上方

所以 $3x^2+ax-4a>ax^2-ax-12$ 恆成立，即 $(3-a)x^2+2ax+(12-4a)>0$ 恆成立

故 $3-a>0\cdots(1)$ ， 且 $D=4a^2-4(3-a)(12-4a)<0$

得 $a<3$ 且 $a^2-4(3-a)^2<0$

$\Rightarrow\ a^2-(6-2a)^2<0\ \Rightarrow\ (6-2a)^2-a^2>0$

$\Rightarrow\ (3a-6)(a-6)>0\ \Rightarrow\ a<2$ 或 $a>6\cdots(2)$

由(1)、(2)可得 $a<2$

答案選（A）