

因式分解

【因式的判別】：

若 $f(x) = g(x) \times Q(x)$ 能整除，則 $g(x)$ 與 $Q(x)$ 皆為 $f(x)$ 的因式。

【範例】：請判別 $x+3$ 是否為 $x^3 + 4x^2 + 4x + 3$ 的因式。

解：因為 $(x^3 + 4x^2 + 4x + 3) \div (x + 3) = x^2 + x + 1 \dots\dots 0$

可以整除，所以 $x+3$ 是 $x^3 + 4x^2 + 4x + 3$ 的因式。

【因式定理】：

(1) 若 $x - c$ 是多項式 $f(x)$ 的因式，則 $f(c) = 0$ 。

【範例】：請判別 $x+5$ 是否為 $f(x) = x^2 - 4x - 45$ 的因式。

解：若 $x+5$ 是 $f(x) = x^2 - 4x - 45$ 的因式，則 $f(x) = (x+5)g(x)$

$$f(x) = x^2 - 4x - 45 \Rightarrow f(-5) = (-5)^2 - 4 \times (-5) - 45 = 25 + 20 - 45 = 0$$

$$\therefore f(-5) = (-5+5)g(-5) = 0 \times g(-5) = 0.$$

∴ $x+5$ 是 $f(x) = x^2 - 4x - 45$ 的因式。

(2) 若 $ax+b$ 是多項式 $f(x)$ 的因式，則 $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ 。

【範例】：請判別 $2x-3$ 是否為 $f(x) = 4x^2 - 2x - 6$ 的因式。

解：若 $2x-3$ 是 $f(x) = 4x^2 - 2x - 6$ 的因式，

$$\text{則 } f(x) = 4x^2 - 2x - 6 = (2x-3)g(x)$$

$$f(x) = 4x^2 - 2x - 6 \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{3}{2} - 6 = 4 \times \frac{9}{4} - 3 - 6 = 9 - 9 = 0$$

所以 $2x-3$ 是 $f(x) = 4x^2 - 2x - 6$ 的因式。

【提公因式法因式分解】：

(1) 從各項提公因式：

如果發現每一項都有共同的因式(數)時，我們可先將此公因式提出。

【範例】：因式分解下列多項式：(i) $(a-b)^2 - 2(a-b)$ (ii) $(x-2y)^2 + (2y-x)^3$

$$\text{解：(i)} \quad (a-b)^2 - 2(a-b) = (a-b)(a-b) - 2(a-b)$$

$$= (a-b) [(a-b)-2] = (a-b)(a-b-2)$$

$$\text{(ii)} \quad (x-2y)^2 + (2y-x)^3 = (x-2y)^2 - (x-2y)^3$$

$$= (x-2y)^2 [1 - (x-2y)] = (x-2y)^2 (1-x+2y)$$

(2) 分組提公因式：當各項沒有公因式時，可嘗試重新分組，再觀察每組之間是否有公因式。

【範例】：因式分解下列各式：(i) $2ax^2 - 3x + 2ax - 3$ (ii) $27x^3 - 9x^2 + 3x - 1$

$$\text{解：(i)} \quad \text{原式} = (2ax^2 - 3x) + 2ax - 3 = x(2ax - 3) + 2ax - 3 = (2ax - 3)(x + 1)$$

$$\text{(ii)} \quad \text{原式} = (27x^3 - 9x^2) + (3x - 1) = 9x^2(3x - 1) + (3x - 1) = (3x - 1)(9x^2 + 1)$$

(3) 拆項後分組提公因式：有時候，可嘗試先將某一項拆開後，再利用分組提公因式。

【範例】：因式分解多項式 $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$ 。

解：將多項式中 x^2 改寫成 $2x^2 - x^2$ 。

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2 &= x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x^2 - 3x - 2 \\ &= x^2(x^2 + 3x + 2) - (x^2 + 3x + 2) = (x^2 + 3x + 2)(x^2 - 1) \\ &= (x+1)(x+2)(x-1)(x+1) = (x+1)^2(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

【利用乘法公式因式分解】：

對於某些多項式，我們可直接利用乘法公式來做因式分解。

(1) 完全平方公式： $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ ； $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ 。

(2) 平方差公式： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 。

【範例】：因式分解 $4x^2y^2 + 2xy - x^2 - y^2$

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= (2xy)^2 - (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= (2xy)^2 - (x-y)^2 = (2xy+x-y)(2xy-x+y) \end{aligned}$$

(3) 立方和、立方差公式： $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

【範例】：因式分解下列各式：(i) $x^6 - 1$ (ii) $\frac{1}{27} - 8a^3$

$$\begin{aligned} \text{解：(i)} \quad x^6 - 1 &= (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 + 1)(x^3 - 1) \\ &= (x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \frac{1}{27} - 8a^3 &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 - (2a)^3 = \left(\frac{1}{3} - 2a\right)\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times 2a + (2a)^2\right] \\ &= \left(\frac{1}{3} - 2a\right)\left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}a + 4a^2\right) \end{aligned}$$

【十字交乘法因式分解】：

【範例】：因式分解下列各式：(1) $8x^6 - 7x^3 - 1$ (2) $6a^2b^2 - abc - 15c^2$

$$\begin{aligned} \text{解：(1)} \quad 8x^6 - 7x^3 - 1 &= (8x^3 + 1)(x^3 - 1) \\ &= (2x+1)(4x^2 - 2x + 1)(x-1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

$8x^3$	$+1$
$1x^3$	-1
$-8x^3 + 1x^3 = -7x^3$	

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad 6a^2b^2 - abc - 15c^2 &= 6(ab)^2 - ab \cdot c - 15c^2 \\ &= (2ab + 3c)(3ab - 5c) \end{aligned}$$

$2ab$	$+3c$
$3ab$	$-5c$
$-10abc + 9abc = -abc$	

1. 下列四個選項中，哪一個是 $2x^2 - 7x + 6$ 的因式？

【90 年模擬題本一】

- (A) $x-1$ (B) $x-2$ (C) $x-3$ (D) $x+3$

重點：因式分解

$$2x^2 - 7x + 6 = (x-2)(2x-3)$$

答案選 (B)

2. 請閱讀下列式子後，回答下兩題，若 $f(x) = 22x^2 - 9x - 1$

【90 年模擬題本二】

(1) 下列哪一個選項為 $f(x)$ 的因式

- (A) $22x-1$ (B) $11x+1$ (C) $11x-1$ (D) $2x+1$

(2) 若 $a = 22 \times 8 \times 8 - 9 \times 8 - 1$ ，下列哪一個選項是 a 的因數

- (A) 17 (B) 87 (C) 89 (D) 175

重點：因式分解

$$(1) 22x^2 - 9x - 1 = (11x+1)(2x-1)$$

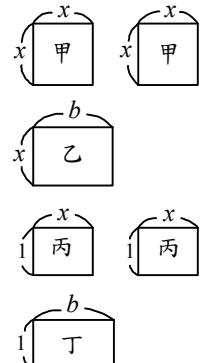
$$(2) \text{令 } x=8, \text{ 則 } a = (11 \times 8 + 1)(2 \times 8 - 1) = 89 \times 15$$

答案選(1)B (2)C

3. 如附圖，有甲、乙、丙、丁四種不相似的矩形，已知邊長均為正整數，其中有 2 個甲，1 個乙，2 個丙，1 個丁，今將這 6 個圖形，拼成一個大的矩形，則其兩鄰邊的邊長分別為多少？

【90 年第一次】

- (A) $2x+1$, $x+b$ (B) $2x+b$, $x+1$
 (C) $x+2b$, $2x+1$ (D) $x+1$, $2x+2b$

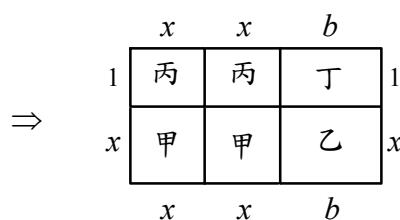
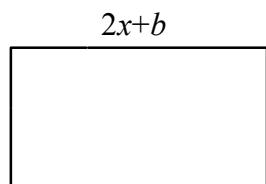


重點：因式分解應用於面積上

甲面積為 x^2 ；乙面積為 bx ；丙面積為 x ；丁面積為 b

全部的面積總合為 $2x^2 + bx + 2x + b = x(2x+b) + (2x+b) = (2x+b)(x+1)$

其意義是： $x+1$



答案選 (B)

4. 將 $4x^2 - ax + 9$ 因式分解可得 $(2x - b)^2$ 的形式。若 a 為正整數，則 $2a - b = ?$

(A) 17 (B) 19 (C) 21 (D) 23 【90 年第二次】

重點：利用乘法公式因式分解 $\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$$(2x - b)^2 = 4x^2 - 4bx + b^2 = 4x^2 - ax + 9 \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 9 \\ 4b = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 3 \end{cases} \therefore 2a - b = 24 - 3 = 21$$

答案選 (C)

5. 下列哪一個多項式是 $6x^2 - 7x - 3$ 與 $4x^2 - 12x + 9$ 的公因式？【91 年第二次】

(A) $2x^2 + 5x - 12$ (B) $(2x - 3)^2$ (C) $2x - 3$ (D) $3x + 1$

重點：因式分解與公因式

$$6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1)$$

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2 \Rightarrow 6x^2 - 7x - 3$$
 與 $4x^2 - 12x + 9$ 的公因式為 $2x - 3$

答案選 (C)

6. 如附圖，有 A 型、 B 型、 C 型三種不同的紙板，其中

A 型：邊長為 π 公分 (π 為圓周率) 的正方形，共有 7 塊；

B 型：長為 π 公分，寬為 1 公分的長方形，共有 17 塊；

C 型：邊長為 1 公分的正方形，共有 12 塊。

從這 36 塊紙板中，拿掉一塊紙板，使得剩下的紙板

在不重疊的情況下，可以緊密的排出一個大長方形

，請問拿掉的是哪一種紙板？【91 年第二次】

(A) A 型 (B) B 型 (C) C 型 (D) 完全不用拿掉，就可排出一個大長方形。

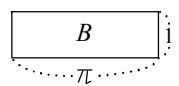
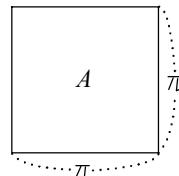
重點：面積的排列

如右圖，若拿掉一個 A 型的紙板

$$\Rightarrow 6\pi^2 + 17\pi + 12 = (3\pi + 4)(2\pi + 3)$$

即可排出一個大長方形。
 3π $+4$
 2π $+3$
 $9\pi + 8\pi = 17\pi$

答案選 (A)



A	B		B	B
B	C	B	C	C
A	B	A	B	B
B	C	B	C	C
A	B	A	B	B
B	C	B	C	C
B	C	B	C	C

7. 若 $481x^2 + 2x - 3$ 可因數分解成 $(13x+a)(bx+c)$ ，其中 a 、 b 、 c 均為整數，則下列敘述何者正確？

【92年第一次】

- (A) $a=1$ (B) $b=468$ (C) $c=-3$ (D) $a+b+c=39$

重點：利用十字交乘法因式分解

$$\because 481x^2 + 2x - 3 = (13x-1) \times (37x+3) = (13x+a) \times (bx+c)$$

$$\therefore a = -1, b = 37, c = 3 \Rightarrow (\text{A}) \text{、}(\text{B}) \text{、}(\text{C}) \text{ 皆不合}$$

$$(\text{D}) a+b+c = -1 + 37 + 3 = 39$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 37 \\ \hline 481 & +2 & -3 \end{array}$$

答案選 (D)

8. 已知 $3x^2 - x - 10 = (3x+5)(x-2)$ ，請問下列哪一個敘述是正確？

【93年第二次】

- (A) $3x^2 - x - 10$ 為 $x - 2$ 的倍式 (B) $x - 2$ 為 $3x^2 - x - 10$ 的倍式
 (C) $3x + 5$ 為 $3x^2 - x - 10$ 的倍式 (D) $3x^2 - x - 10$ 為 $3x + 5$ 的因式

重點：因式與倍式的意義：若 $A = B \times C$ ，則 A 為 C 的倍式，而 B 與 C 皆為 A 的因式。

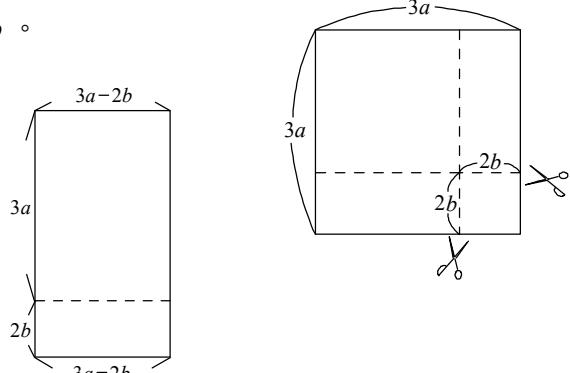
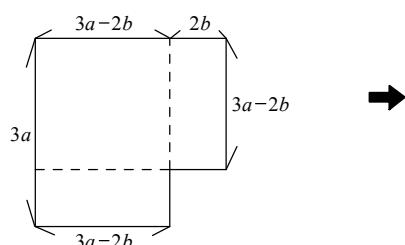
答案選 (A)

9. 如附圖，守將邊長為 $3a$ 的正方形沿著虛線剪成二塊正方形及二塊長方形，果拿掉邊長為 $2b$ 的小正方形後，再將剩下的三塊拼成一塊矩形，則此塊矩形長的邊長為何？

- (A) $3a+2b$ (B) $3a+4b$ (C) $6a+2b$ (D) $6a+4b$ 。

重點：因式分解 \Rightarrow 面積 = 長 \times 寬

原圖變成：



\therefore 矩形的邊長為 $(3a+2b)$ 及 $(3a-2b)$

答案選 (A)

10. 若 $1999^2 - 2000^2 = 1333 \times a$ ，則 $a = ?$

- (A) 1 (B) -1 (C) 3 (D) -3

重點：利用乘法公式因式分解 $\Rightarrow a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$1999^2 - 2000^2 = (1999+2000) \times (1999-2000) = 3999 \times (-1) = 3 \times 1333 \times (-1) = 1333 \times (-3)$$

$$\therefore a = -3$$

答案選 (D)

11. 若 $(3xy + 8) - 2(x + 6y) = (ax + b)(cy + d)$ ，則下列何者可能是 $a + b + c + d$ 的值？

- (A) 4 (B) 2 (C) -1 (D) -3

重點：因式分解

$$\because (3xy + 8) - 2(x + 6y) = 3xy + 8 - 2x - 12y = 3xy - 2x - 12y + 8 = (x - 4)(3y - 2)$$

$$\therefore a + b + c + d = 1 + (-4) + 3 + (-2) = -2 \text{ 或 } a + b + c + d = 4 + (-1) + 2 + (-3) = 2$$

答案選 (B)

12. 已知 a 、 b 是整數，若 $x^2 + mx - 12$ 可分解為 $(x + a)(x + b)$ ，則 m 不可能 是下列何數？

- (A) 11 (B) 7 (C) 4 (D) 1

重點：因式分解有多種可能的分解情況

$x^2 + mx - 12$ 可能分解的情況有 $(x - 1)(x + 12)$ 、 $(x + 1)(x - 12)$ 、 $(x - 2)(x + 6)$

、 $(x + 2)(x - 6)$ 、 $(x - 3)(x + 4)$ 、 $(x + 3)(x - 4)$ 共六種。∴ $m = \pm 11$ 、 ± 4 、 ± 1

答案選 (B)

13. 下列哪一個數可以寫成 $n(n + 6) + 9$ 的形式？(其中 n 為整數)

- (A) 281 (B) 284 (C) 285 (D) 289

重點：利用乘法公式因式分解 $n(n + 6) + 9 = n^2 + 6n + 9 = (n + 3)^2$

答案選 (D)

14. 因式分解 $(6x^2 - 5xy - 6y^2) + (12x + 8y)$ 的結果為 $(3x + ay)(bx + cy + d)$ ，則 a 、 b 、 c 、 d

四數中，有幾個數是奇數？

- (A) 1 個 (B) 2 個 (C) 3 個 (D) 4 個

重點：等差數列與級數

$$(6x^2 - 5xy - 6y^2) + (12x + 8y) = 6x^2 - 5xy - 6y^2 + 12x + 8y$$

$$(3x + ay)(bx + cy + d) = 3bx^2 + abxy + 3cxy + acy^2 + 3dx + ady$$

$$= 3bx^2 + (ab + 3c)xy + acy^2 + 3dy + ady$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3b = 6 \\ ab + 3c = -5 \\ ac = -6 \\ 3d = 12 \\ ad = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ d = 4 \\ a = 2 \\ c = -3 \end{cases} \therefore \text{只有一個。}$$

答案選 (A)

15. 若 $x^2 + ax - 8$ 可分解為兩個一次因式的乘積，則下列何者不可能為整數 a 的值？

- (A) -7 (B) -6 (C) -2 (D) 2

重點：因式分解 $x^2 + ax - 8$ 可能分解的情況有 $(x-2)(x+4)$ 、 $(x+2)(x-4)$ 、
 $(x-1)(x+8)$ 、 $(x+1)(x-8)$ 四種。 $\therefore a = \pm 2$ 、 ± 7 。

答案選 (B)

16. 請問 $99 \times 101 + 26 \times 24 - 99^2 - 2 \times 99 - 1 - 25^2$ 之值是多少？

- (A) -1 (B) -2 (C) 0 (D) 1

重點：利用乘法公式因式分解 $\Rightarrow a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 99 \times (99+2) + (25+1)(25-1) - 99^2 - 2 \times 99 - 1 - 25^2 \\ &= 99^2 + 2 \times 99 + 25^2 - 1^2 - 99^2 - 2 \times 99 - 1 - 25^2 = -2 \end{aligned}$$

答案選 (B)

17. 設 $x = 3.78$ ， $y = 0.39$ ，則 $x^2 + 4y^2 - 4xy + 1$ 之值為何？

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

重點：利用因式分解求值

$$\because x^2 + 4y^2 - 4xy = x^2 - 4xy + 4y^2 = (x - 2y)^2$$

$$\therefore x^2 + 4y^2 - 4xy + 1 = (x - 2y)^2 + 1 = (3.78 - 2 \times 0.39)^2 + 1 = 3^2 + 1 = 10$$

答案選 (D)

18. 若 $a = 99 \times 3251 - 99 \times 3075 - 99^2$ ，則下列何者為 a 的標準分解式？

- (A) $3^2 \times 7^2 \times 11$ (B) $3^2 \times 7 \times 11^2$ (C) $3 \times 7^2 \times 11^2$ (D) $3^2 \times 7^2 \times 11^2$

重點：利用因式分解找求值式的標準分解式

$$a = 99 \times (3251 - 3075 - 99) = 99 \times 77 = 3^2 \times 11 \times 7 \times 11 = 3^2 \times 7 \times 11^2$$

答案選 (B)

19. 設 $x + y - 2 = 0$ ，則 $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y - 3$ 之值為何？

- (A) 3 (B) -3 (C) 5 (D) -5

重點：利用因式分解求值

$$\because x + y = 2，\therefore x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y - 3 = (x + y)^2 - 2(x + y) - 3 = 2^2 - 2 \times 2 - 3 = -3$$

答案選 (B)

20. 設 a 、 b 、 c 為 $\triangle ABC$ 之三邊長，且 $a^2 + b^2 + c^2 - 10a - 24b - 26c + 338 = 0$ ，則 $\triangle ABC$ 為何種三角形？

(A) 正三角形 (B) 直角三角形 (C) 等腰三角形 (D) 無法判斷

重點：利用乘法公式因式分解 $\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 10a - 24b - 26c + 338 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 10a + 25 + b^2 - 24b + 144 + c^2 - 26c + 169 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 5)^2 + (b - 12)^2 + (c - 13)^2 = 0 \Rightarrow a = 5, b = 12, c = 13$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2 = c^2, \therefore \triangle ABC \text{ 為直角三角形。}$$

答案選 (B)

21. 設 x 、 y 為整數，且 $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0$ ，則 $2x + y$ 之值為何？

(A) 3 (B) 2 (C) -2 (D) -3

重點：利用乘法公式因式分解 $\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0 \Rightarrow x^2 + (y^2 - 6y + 9) = 0 \Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, y - 3 = 0 \Rightarrow x = 0, y = 3. \therefore 2x + y = 2 \times 0 + 3 = 3.$$

答案選 (A)

22. 設 $x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$ ，若 $p < 0$ ， $q < 0$ ，且 $|a| > |b|$ ，則下列何者正確？

(A) $a > 0, b > 0$ (B) $a > 0, b < 0$ (C) $a < 0, b > 0$ (D) $a < 0, b < 0$

重點：絕對值與因式分解的綜合觀念

$\because q = ab < 0$ ， $\therefore a$ 與 b 互為異號數。又 $\because p = a + b < 0$ ， $|a| > |b|$ ， $\therefore a < 0, b > 0$ 。

答案選 (C)

23. 設 a 、 b 、 c 為 $\triangle ABC$ 之三邊長，且 $a^2 + b^2 + c^2 - 8a - 8b - 8c + 48 = 0$ ，則 $\triangle ABC$ 的

面積為何？ (A) 6 (B) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) 12

重點：利用乘法公式因式分解 $\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 8a - 8b - 8c + 48 = 0 \Rightarrow a^2 - 8a + 16 + b^2 - 8b + 16 + c^2 - 8c + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 4)^2 + (b - 4)^2 + (c - 4)^2 = 0 \Rightarrow a = 4, b = 4, c = 4$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 為正三角形。} \Rightarrow \triangle ABC \text{ 面積} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$$

答案選 (C)

24. 如附圖，有 A 、 B 兩個矩形，今將這 2 個矩形拼成一個大的矩形，則下列何者可表示大矩形的面積？

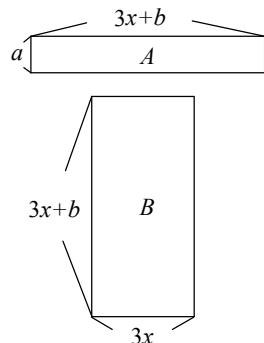
(A) $9x^2 + bx + b$ (B) $(3x + a)(6x + 2b)$

(C) $3ax(x + b)$ (D) $(3x + a)(3x + b)$

重點：分組提公因式法

$$a(3x + b) + 3x(3x + b) = (3x + b)(3x + a)$$

答案選 (D)



25. 將 $2^{12} - 1$ 做質因數分解，則其最大的質因數為何？

- (A) 11 (B) 13 (C) 17 (D) 19

重點：利用乘法公式因式分解 $\Rightarrow a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$$2^{12} - 1 = (2^6 - 1)(2^6 + 1) = (2^3 - 1)(2^3 + 1) \times 65 = 7 \times 9 \times 65 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

答案選 (B)

26. $\frac{1998^3 + 3 \times 1998^2 + 3996}{1998^2 + 1998}$ 之值為何？

- (A) 2000 (B) 2500 (C) 3000 (D) 3500

重點：利用分組提公因式法

假設 $x = 1998$ ，則原式 $= \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 + x} = \frac{x(x+1)(x+2)}{x(x+1)} = x + 2 = 1998 + 2 = 2000$ 。

答案選 (A)

27. 若 x 、 y 都是正整數，且 $3x^2 + 10xy - 8y^2$ 之值為 19，則 $x - y$ 之值為何？

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

重點：因式分解與質數的綜合應用

$$3x^2 + 10xy - 8y^2 = 19 \Rightarrow (x + 4y)(3x - 2y) = 19$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + 4y = 19 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 3x - 2y = 19 \\ x + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{39}{7} \\ y = -\frac{8}{7} \end{cases} \text{ (不合) } , \therefore x - y = 3 - 4 = -1$$

答案選 (B)

28. 若 $0 < x < 1$ ，且 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$ ，則 $x - \frac{1}{x}$ 之值為何？

- (A) 5 (B) -5 (C) $\sqrt{5}$ (D) $-\sqrt{5}$

重點：利用乘法公式因式分解 $\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$$\because x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 7 - 2 \Rightarrow (x - \frac{1}{x})^2 = 5 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \pm\sqrt{5} \text{，且 } 0 < x < 1.$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = -\sqrt{5}$$

答案選 (D)

29. 若 $16x^2 - (m-1)x + 25$ 為完全平方式，下列何者可能為 m 之值？

- (A) -41 (B) -39 (C) 37 (D) 39

重點：利用乘法公式因式分解 $\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$$\because 16x^2 - (m-1)x + 25 \text{ 為完全平方式，} \therefore D = [-(m-1)]^2 - 4 \times 16 \times 25 = 0$$

$$\Rightarrow (m-1)^2 = 4 \times 16 \times 25 \Rightarrow m-1 = \pm(2 \times 4 \times 5) = \pm 40 \Rightarrow m = 40+1=41 \text{ 或 } m=-40+1=-39$$

答案選 (B)

30. 若 $2 \times 4 \times (3^2 + 1) \times (3^4 + 1) \times (3^8 + 1) \times (3^{16} + 1) = 3^n - 1$ ，求 n 為何？

- (A) 16 (B) 32 (C) 64 (D) 128

重點：利用乘法公式因式分解 $\Rightarrow (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

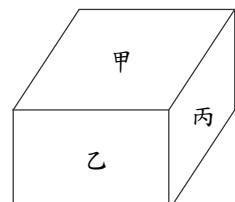
$$\begin{aligned} & 2 \times 4 \times (3^2 + 1) \times (3^4 + 1) \times (3^8 + 1) \times (3^{16} + 1) \\ &= (3-1) \times (3+1) \times (3^2 - 1) \times (3^4 - 1) \times (3^8 - 1) \times (3^{16} - 1) \\ &= (3^2 + 1) \times (3^2 - 1) \times (3^4 - 1) \times (3^8 - 1) \times (3^{16} - 1) \\ &= (3^4 + 1) \times (3^4 - 1) \times (3^8 - 1) \times (3^{16} - 1) \\ &= (3^8 + 1) \times (3^8 - 1) \times (3^{16} - 1) = (3^{16} + 1) \times (3^{16} - 1) = 3^{32} - 1. \therefore n = 32 \end{aligned}$$

答案選 (B)

31. 如附圖，已知一長方體兩兩相鄰的三面之面積分別為：甲： $2x^2 - 3x - 2$ ；

乙： $x^2 - 4$ ；丙： $2x^2 + 5x + 2$ 其中 $x > 2$ ，則此長方體的體積為何？

- (A) $2x^3 + x^2 - 8x - 4$ (B) $2x^3 + x^2 + 8x + 4$
 (C) $2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$ (D) $2x^3 - x^2 - 8x + 4$



重點：因式分解的應用

甲： $2x^2 - 3x - 2 = (2x+1)(x-2)$ ，乙： $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

丙： $2x^2 + 5x + 2 = (2x+1)(x+2)$ 。

因此可得長方體的三邊分別為 $(2x+1)$ 、 $(x+2)$ 、 $(x-2)$

故長方體的體積 = $(x+2)(x-2)(2x+1) = (x^2 - 4)(2x+1) = 2x^3 - 8x + x^2 - 4$
 $= 2x^3 + x^2 - 8x - 4$

答案選 (A)