

乘法公式、多項式與商高定理

※ 平方公式整理：

1. 完全平方和： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. 完全平方差： $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. 平方差： $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
4. 三項完全平方和： $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

※ 立方公式整理及補充：

1. 立方和： $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ 。
2. 立方差： $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ 。
3. 完全立方和： $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 。
4. 完全立方差： $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 。
5. $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 。
6. $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + ab + b^4$ 。

【補充】有關 $(a+b)^n$ 的展開式：(巴斯卡三角形)

到底這個三角形有什麼用處呢？其實，這個三角形的每一列數字，剛好就是乘法公式學到的 $(a+b)^n$ 的展開式的係數表：

第 n 列	$(a+b)^n$	將 $(a+b)^n$ 展開	巴斯卡三角形
$n=0$	$(a+b)^0$	1	1
$n=1$	$(a+b)^1$	$a+b$	1 1
$n=2$	$(a+b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$n=3$	$(a+b)^3$	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$n=4$	$(a+b)^4$	$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1
$n=5$	$(a+b)^5$	$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	1 5 10 10 5 1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

所以，想知道 $(a+b)^n$ 展開後的係數，只要查一下巴斯卡三角形的第 n 列就行了。

【多項式的加、減運算】：

1. 在用橫式做多項式的加法、減法運算時，事實上就是將同類項的係數相加或相減。

【範例】：請化簡 $(-x + 2x^2 + 2) + (1 + 2x + 3x^2)$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{解} &: (-x + 2x^2 + 2) + (1 + 2x + 3x^2) \\
 &= (2x^2 - x + 2) + (3x^2 + 2x + 1) \\
 &= (2+3)x^2 + (-1+2)x + (2+1) \\
 &= 5x^2 + x + 3
 \end{aligned}$$

2. 在用直式做多項式的加法、減法運算時，須將同類項對齊，再將係數相加或相減。

【範例】：請化簡 $(2x^2 - x + 2) + (3x^2 + 2x + 1)$ 。

$$\begin{array}{r} \text{解} : \quad 2x^2 - x + 2 \\ + \quad 3x^2 + 2x + 1 \\ \hline 5x^2 + x + 3 \end{array}$$

3. 分離係數法是將直式中各項的係數與文字符號分離開，只寫出係數作運算的一種方法。在寫出係數時，遇到缺項，通常都補 0。

【範例】：請化簡 $(5x^2 + 2) - (x^2 - 3x - 7)$ 。

$$\begin{array}{r} \text{解} : \quad x^2 \quad x^1 \quad x^0 \\ \quad \quad 5 \quad 0 \quad 2 \\ -) \quad 1 \quad -3 \quad -7 \\ \hline \quad \quad 4 \quad 3 \quad 9 \end{array}$$

$$\text{所以 } (5x^2 + 2) - (x^2 - 3x - 7) = 4x^2 + 3x + 9$$

【多項式的乘法運算】：

1. 在用橫式做多項式的乘法運算時，事實上與乘法運算相同。

【範例】：利用乘法運算展開下列各式：

$$(1) (2x - 3)(3x - 5) \quad (2) (x + 6)(3x - 4)$$

$$\begin{array}{l} \text{解} : (1) (2x - 3)(3x - 5) = 2x(3x - 5) - 3(3x - 5) \\ \qquad \qquad \qquad = 6x^2 - 10x - 9x + 15 = 6x^2 - 19x + 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (2) (x + 6)(3x - 4) = x(3x - 4) + 6(3x - 4) \\ \qquad \qquad \qquad = 3x^2 - 4x + 18x - 24 = 3x^2 + 14x - 24 \end{array}$$

也可以用直式乘法作答，如下圖所示：

$$\begin{array}{r} (1) \quad \begin{array}{c} 2x \\ \times 3x \\ \hline -10x \quad +15 \\ +) 6x^2 - 9x \\ \hline 6x^2 - 19x \quad +15 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (2) \quad \begin{array}{c} x \\ \times 3x \\ \hline -4x \quad -24 \\ +) 3x^2 + 18x \\ \hline 3x^2 + 14x \quad -24 \end{array} \end{array}$$

也可以用分離係數法作答，如下圖所示：

$$\begin{array}{r} (1) \quad \begin{array}{c} x^2 \quad x^1 \quad x^0 \\ \quad 2 \quad \quad -3 \\ \times) \quad 3 \quad \quad -5 \\ \hline -10 \quad +15 \\ +) 6 \quad -9 \\ \hline 6 \quad -19 \quad +15 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (2) \quad \begin{array}{c} x^2 \quad x^1 \quad x^0 \\ \quad 1 \quad \quad 6 \\ \times) \quad 3 \quad \quad -4 \\ \hline -4 \quad -24 \\ +) 3 \quad +18 \\ \hline 3 \quad +14 \quad -24 \end{array} \end{array}$$

【範例】：利用乘法運算展開 $(x^2 + x + 2) \times (x - 3)$ 。

$$\begin{aligned} \text{解} : \quad & (x^2 + x + 2) \times (x - 3) \\ = & x(x^2 + x + 2) - 3(x^2 + x + 2) = x^3 + x^2 + 2x - 3x^2 - 3x - 6 \\ = & x^3 + (1-3)x^2 + (2-3)x - 6 = x^3 - 2x^2 - x - 6 \end{aligned}$$

也可以用直式乘法或分離係數法作答，如下圖所示：

【多項式的除法運算】：

【範例】：求 $(x^2 + 4x + 2) \div (x + 1)$ 的商式及餘式。

解：方法一：直式計算法

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x+1 \overline{) x^2 + 4x + 2 } \\ \underline{x^2 + x} \\ 3x+2 \\ \underline{3x+3} \\ -1 \end{array}$$

商式為 $x+3$ ，餘式為 -1 。

方法二：分離係數法

$$\begin{array}{r} 1+3 \\ 1+1 \overline{) 1+4+2 } \\ \underline{1+1} \\ 3+2 \\ \underline{3+3} \\ -1 \end{array}$$

※注意：在完成多項式的除法後，為了驗證所得結果是否正確，除了重新檢視運算過程外，也常用上述的概念來驗算。例如：

$$\begin{array}{ll} (x+1)(x+3)+(-1) & (\text{除式} \times \text{商式} + \text{餘式}) \\ = x^2 + 4x + 3 - 1 & \\ = x^2 + 4x + 2 & (\text{被除式}) \end{array}$$

【範例】：求 $(2x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 0x + 2) \div (x^2 + 0x - 1)$ 的商式及餘式。

解：步驟 a. 將原式改變成降幕排列，且缺項部分補零：

$$(2x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 0x + 2) \div (x^2 + 0x - 1)$$

步驟 b.

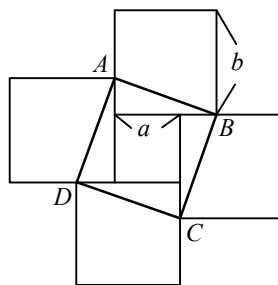
$$\begin{array}{r} 2x^2 \longrightarrow \text{首商} \\ x^2 + 0x - 1 \overline{) 2x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 0x + 2 } \\ \underline{2x^4 + 0x^3 - 2x^2} \\ - 2x^2 \end{array}$$

步驟 c.

$$\begin{array}{r} 2x^2 \quad -2 \longrightarrow \text{次商} \\ x^2 + 0x - 1 \overline{) 2x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 0x + 2 } \\ \underline{2x^4 + 0x^3 - 2x^2} \\ - 2x^2 + 0x + 2 \\ \underline{- 2x^2 + 0x + 2} \\ 0 \end{array}$$

故可知 $(-4x^2 + 2 + 2x^4) \div (-1 + x^2) = 2x^2 - 2$ 。

1. 將一塊邊長為 a 的正方形，與四塊邊長為 b 的正方形（其中 $b > a$ ），拼成如圖(四)，其中 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 、 \overline{AD} 形成一個四邊形，則四邊形 $ABCD$ 的面積為多少？
- (A) $b^2 + (b-a)^2$ (B) $b^2 + a^2$
 (C) $(b+a)^2$ (D) $a^2 + 2ab$ 【90 年第一次】



圖(四)

2. 將 $4x^2 - ax + 9$ 因式分解，可得 $(2x-b)^2$ 的形式。若 a 為正整數，則 $2a-b = ?$
- (A) 9 (B) 15 (C) 21 (D) 27 【90 年第二次】
3. 小傑用長為 x 公分的竹筷去量一張長方形的紙，發現紙的長度比竹筷的兩倍長少 1 公分，寬比竹筷長多 2 公分。已知紙的面積為 3000 平方公分，依題意下列哪一個一元二次方程式是正確的？
- (A) $(x-2)(2x+1)=3000$ (B) $(x+2)(2x-1)+3000=0$
 (C) $2x^2 - 3x = 3002$ (D) $2x^2 + 3x - 3002 = 0$ 【90 年第二次】
4. 章老師作一個多項式除法示範後，擦掉計算過程中的六個係數，並以 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 表示，求 $a+b+d+e = ?$
- (A) 18 (B) 26 (C) 38 (D) 44 【91 年第一次】

$$\begin{array}{r}
 & \frac{2x+3}{bx+5} \\
 & \frac{6x^2+ax+d}{cx^2+10x} \\
 & \hline
 & ex+d \\
 & fx+15 \\
 & \hline
 & -2
 \end{array}$$

5. 下列哪一個選項為 $[(2x^2 + x - 3) - (-x^2 - 3x + 4)] \div (x - 1)$ 的商式？ 【92 年第二次】
(A) $3x - 7$ (B) $3x + 7$ (C) $x - 1$ (D) $x + 1$

6. 求 $2001 \times 2002 - 1999 \times 2004$ 之值為何？ 【92 年第二次】
(A) 6 (B) 16 (C) 26 (D) 36

7. 求 $536 \times 0.52 - 364 \times 0.48 + 364 \times 0.52 - 536 \times 0.48$ 之值為何？ 【93 年第一次】
(A) 0 (B) 20 (C) 36 (D) 40

8. 計算 $899^2 - 101^2$ 之值為何？ 【94 年第一次】
(A) 788000 (B) 798000 (C) 888000 (D) 898000

9. 算 $\frac{1}{389} + \frac{390 \times 388}{389} - 379$ 之值為何？ 【94 年第二次】

- (A) 1 (B) 10 (C) $\frac{1}{389}$ (D) $\frac{12}{389}$

10. $(69\frac{17}{23}) \times (70\frac{6}{23}) = a + b$ ，若 a 為正整數且 $0 < b < 1$ ，則 $a = ?$ 【95 年第一次】

- (A) 3583 (B) 3584 (C) 4899 (D) 4900

11. 下列四個式子，哪一個值最大？ 【96 年第二次】

- (A) $777^2 - 27^2$ (B) $852^2 - 48^2$ (C) $1001^2 - 599^2$ (D) $1006^2 - 604^2$

12. 計算 $\frac{138^2 + 76 \times 138 + 38^2}{138^2 - 38^2}$ 之值為何？

- (A) 1 (B) $\frac{22}{25}$ (C) $\frac{44}{25}$ (D) $\frac{11}{50}$

13. 設 $a - b = 35$, $ab = -216$, 則 $8a^2 + 3ab + 8b^2$ 之值為何 ?

- (A) -5696 (B) -1296 (C) 1296 (D) 5696

14. 100.01×100.01 之計算結果，其個位數字為何 ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 9

15. $2004^2 - 1996^2 = 4000 \times b$, 則 b 之值為何 ?

- (A) 8 (B) 16 (C) 1002 (D) 2004

16. 計算 999.5^2 之值為何 ?

- (A) 9990.25 (B) 99900.25 (C) 999000.25 (D) 9990000.25

17. $699^2 = \square + 1$ ，則 \square 為何？

- (A) 698×699 (B) 699×700 (C) 698×700 (D) 699×701

18. 請選出下列哪一個數最接近 $(199\frac{3}{4})^2$ 之值？

- (A) 40000 (B) 39999 (C) 39990 (D) 39900

19. $1001^3 - 3 \times 1001^2 + 3 \times 1001 - 1$ 之值為何？

- (A) 10000000000 (B) 1000000000 (C) 100000000 (D) 10000000

20. 已知 $a+b=29$ 且 $ab=204$ ，則 a^3+b^3 之值為何？

- (A) 7793 (B) 6641 (C) 5571 (D) 4453

21. 計算 $(10006 - 11)^2 - (10001 - 16)^2$ 之值為何？

- (A) 199800 (B) 199700 (C) 199600 (D) 199500

22. 計算 $7931 \times 7931 - 7930 \times 7932 - 7934 \times 7937 + 7935 \times 7936$ 之值為何？

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

23. $(x+1)^2$ 除 $(x+1)^4 - 3x^2 - 5x + 1$ 的餘式為何？

- (A) $-2x + 5$ (B) $x + 4$ (C) $3x - 2$ (D) $-x + 7$

24. 若 $x^2 + x + 1 = 0$ ，則多項式 $(x^2 + x - 2)^3 + 7(x^2 + x + 3)^2 + 2$ 之值為：

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。

25. 已知一長方形的面積為 $(x^2 + 5x - 24)$ 平方公分 (x 為正整數)，且知其一邊長為 5 公分，則下列何者可能是此長方形的面積？
 (A) 70 平方公分 (B) 80 平方公分 (C) 90 平方公分 (D) 100 平方公分。

26. 若 $A = 2x^3 + 5x^2 + 2x + 1$ 、 $B = x^2 + 2x$ ， a 為異於 0 之常數， $A \div B$ 之商式為 $Q = (2x + 1)$ ，餘式為 $R = 1$ ，則 $A \div aB$ 之商式、餘式各為：
 (A) 商式為 $\frac{Q}{a}$ ，餘式為 $\frac{R}{a}$ (B) 商式為 $\frac{Q}{a}$ ，餘式為 R
 (C) 商式為 Q ，餘式為 $\frac{R}{a}$ (D) 商式為 Q ，餘式為 R 。

27. 設 $f(x)$ 為多項式，且 $\frac{-x^3 + 6x - 2}{f(x)} = -x^2 - 4x - 10 + \frac{-42}{f(x)}$ ，則關於 $f(x)$ 的敘述
 下列何者是正確的？
 (A) 次數是 2 次 (B) 常數項是 -4 (C) x 項是缺項 (D) $f(x)$ 是單項式

28. 設利用乘法公式展開 $(x-1)(x^2+1)(x^2+x+1)$ 得展開式為 $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 1$ ，其中 a 、 b 、 c 、 d 恰有一個為負數，此負數為：
 (A) a (B) b (C) c (D) d

29. 多項式 $f(x)$ 除以 $x+2$ ，其商式為 $4x^2 - 2x - 6$ ，餘式為 4，且 $f(x)$ 除以 $2x+1$ 之商式為 $q(x)$ ，餘式為 a ，則：

- | | |
|---------------------------------------|--|
| (A) $q(x) = 2x^2 + 2x - 6$, $a = 2$ | (B) $q(x) = 4x^2 + 4x - 12$, $a = -2$ |
| (C) $q(x) = 4x^2 + 4x - 12$, $a = 2$ | (D) $q(x) = 2x^2 + 2x - 6$, $a = -2$ |

30. 多項式 $\frac{(x^2 - x + 1)^5 (x^3 + 1)^2}{(5x^2 + x + 1)^4} - (8x^7 + 9x^4 + 2x - 8)$ 是多少次式？

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

31. $(x^3 + 4x^2 - 19) = (x^2 + 6x + 12) \times f(x) + 5$ ，則 $f(x)$ 為何？

- (A) $x - 1$ (B) $x - 2$ (C) $x + 1$ (D) $x + 2$

32. 設 A 、 B 為兩多項式且 $A + B = 3x^3 - x^2 - x + 1$ ， $A - B = x^3 + 3x^2 - x + 5$ ，

則 $2A - 4B$ 為何？

- (A) $10x^2 - 2x + 14$ (B) $5x^2 + 3x + 24$ (C) $3x^2 + 12x - 3$ (D) $7x^2 + 14x - 8$

33. 設 $(x^2 - 2x - 1)^2 = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，則 $a + b + c + d$ 之值為何？

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

34. 設 $x^2 + 5x - 5 = 0$ ，則 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ 之值為何？

- (A) 96 (B) 99 (C) 105 (D) 108

35. 在 $(x^3 + 3x^2 - ax + 4)(2x^2 - 4x + 1)$ 的乘積展開式中， x^2 項的係數為 -9 ，則 $a = ?$

- (A) -5 (B) $-\frac{3}{4}$ (C) -1 (D) 1

36. 一數學題「兩多項式 A 、 B ； B 為 $x^2 + x + 1$ ，試求 $A \div B$ 。」，某生誤將「 $A \div B$ 」看成「 $A + B$ 」，結果求出答案為「 $x^3 + x^2 + x$ 」，則 $A \div B$ 正確的答案為何？

- (A) x (B) $x - 1$ (C) $x - 2$ (D) $x - 3$

37. 一數學題「兩多項式 A 、 B ； B 為 $2x^2 + x - 1$ ，試求 $A - B$ 。」，某生誤將「 $A - B$ 」看成「 $A + B$ 」，結果求出的答案為「 $5x^2 - 3x - 7$ 」，則 $A - B$ 的正確答案為何？

- (A) $x^2 + 5x + 5$ (B) $x^2 - 5x - 5$ (C) $x^2 + 5$ (D) $x^2 - 5x$