

## 一元二次方程式的應用

### 一元二次方程式的應用問題：

我們給定一元二次方程式可以求其解(根)。在此章節裡，我們若知道一元二次方程式的根，反過來是否能求出與其對應的一元二次方程式呢？

#### a. 根與係數的關係：

設  $\alpha$ 、 $\beta$  為二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的兩根，

$$\text{則(1) } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{(2) } \alpha\beta = \frac{c}{a} \text{。}$$

#### b. 已知兩根，求作方程式。

設  $\alpha$ 、 $\beta$  為二次方程式的兩根，則二次方程式為  $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$

即方程式為： $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ 。

公式：兩根之和 =  $\alpha + \beta$  (兩根之和 = 一次項係數的相反數)

兩根之積 =  $\alpha\beta$  (兩根之積 = 常數項)

**【範例】**：若一個二次方程式之二根為 3、-5，求此二次方程式。

解：方法一：兩根之和 =  $\alpha + \beta = 3 + (-5) = -2$

$$\text{兩根之積} = \alpha\beta = 3 \times (-5) = -15$$

$$\therefore \text{此二次方程式為：} x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = x^2 + 2x - 15 = 0 \text{。}$$

$$\text{方法二：} (x - \alpha)(x - \beta) = (x - 3)(x + 5) = x^2 + 2x - 15 = 0 \text{。}$$

**【範例】**：若一個二次方程式之二根為 1、6，求此二次方程式。

解：方法一：兩根之和 =  $1 + 6 = 7$

$$\text{兩根之積} = 1 \times 6 = 6$$

$$\therefore \text{此二次方程式為：} x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = x^2 - 7x + 6 = 0 \text{。}$$

$$\text{方法二：} (x - \alpha)(x - \beta) = (x - 1)(x - 6) = x^2 - 7x + 6 = 0 \text{。}$$

**【範例】**：設  $\alpha$ 、 $\beta$  為二次方程式  $x^2 + 3x - 5 = 0$  的兩根，則  $\alpha + \beta$ ， $\alpha\beta$  之值。

$$\text{解：} \therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{1} = -3$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

**【範例】**：設  $\alpha$ 、 $\beta$  為二次方程式  $-x^2 + 5x + 12 = 0$  的兩根，則  $\alpha + \beta$ ， $\alpha\beta$  之值。

$$\text{解：} \therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{(-1)} = 5$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{12}{(-1)} = -12$$

**【範例】**：若一個二次方程式之二根為  $\frac{3 \pm \sqrt{7}}{3}$ ，求此一元二次方程式。

解：  $x^2 - (a + \beta)x + a\beta = 0$ 。

$$a + \beta = \frac{3 + \sqrt{7}}{3} + \frac{3 - \sqrt{7}}{3} = \frac{6}{3} = 2,$$

$$a\beta = \frac{3 + \sqrt{7}}{3} \times \frac{3 - \sqrt{7}}{3} = \frac{9 - 7}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\text{則方程式為 } x^2 - 2x + \frac{2}{9} = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 18x + 2 = 0。$$

**【範例】**：方程式  $x^2 + 3x - 2 = 0$  的兩根為  $a$ 、 $\beta$ ，而以  $3a$ 、 $3\beta$  為兩根的方程式為  $3x^2 + ax + b = 0$ ，求  $a + b$  之值。

解：  $\because a$ 、 $\beta$  為  $x^2 + 3x - 2 = 0$  的兩根。

$$\therefore a + \beta = -\frac{b}{a} = -3, \quad a\beta = \frac{c}{a} = -2$$

$\therefore 3a$ 、 $3\beta$  為  $3x^2 + ax + b = 0$  的兩根。

$$\therefore 3a + 3\beta = 3(a + \beta) = 3 \cdot (-3) = -9$$

$$-\frac{a}{3} = -9 \Leftrightarrow a = 27$$

$$3a \times 3\beta = 9(a\beta) = 9 \cdot (-2) = -18$$

$$\frac{b}{3} = -18 \Leftrightarrow b = -54$$

$$\text{則 } a + b = 27 + (-54) = -27$$

**【範例】**：甲、乙兩人解一元二次方程式，甲將常數項的係數看錯，解得兩根為 4 與 -2，乙將一次項係數看錯，解得兩根為 -5、3，求正確的方程式及兩根。

解：甲看錯的方程式為： $(x - 4)(x + 2) = x^2 - 2x - 8 = 0$

乙看錯的方程式為： $(x - 3)(x + 5) = x^2 + 2x - 15 = 0$

$\therefore$  甲看錯常數項， $\therefore$  甲的方程式裡  $x^2$  跟  $-2x$  是正確的。

$\therefore$  乙看錯一次項， $\therefore$  乙的方程式裡  $x^2$  跟  $-15$  是正確的。

因此，正確的方程式為  $x^2 - 2x - 15 = 0$ 。

$$\therefore x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5) = 0$$

$\therefore$  則此方程式的解為  $x = -3$  或  $x = 5$ 。

答：正確的方程式為  $x^2 - 2x - 15 = 0$  及兩根為  $x = -3$  或  $x = 5$ 。

**c. 分式方程式的應用與解法：**

(1) 設  $A$  與  $B$  是兩多項式，且  $B \neq 0$ ，則算式  $\frac{A}{B}$  叫做分式。

(2) 一個方程式含有分式，且分式的分母中含有未知數，此方程式叫做分式方程式。

$$\text{例：} \frac{1}{x} + 1 = 0, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+2}。$$

(3) 分式方程式的分母中必含有未知數；

對分式方程式而言，分母中不含未知數的方程式叫做整式方程式。

(4) 解分式方程式的方法有兩種：

**方法一：通分母法。解法步驟：**

① 移項：將方程式之各項移到左邊，使右邊等於 0。

② 通分：合併及化簡成最簡分式  $\frac{A}{B} = 0$ 。

③ 令最簡分式的分子等於 0 (即  $A = 0$ ) 解之，即得所求之根。

④ 驗算：在通分的過程中，方程式可能會有增根的現象。方程式所解得的根使分母為 0 的即為增根，必須捨去，剩下來的根，就是原方程式的解。

**方法二：去分母法。解法步驟：**

① 求出各分式中分母的最低公倍式。

② 去分母：用最低公分母乘方程式兩邊的各项，化為整式方程式。

③ 解這整式方程式。

④ 驗算：在通分的過程中，方程式可能會有增根的現象。方程式所解得的根使分母為 0 的即為增根，必須捨去，剩下來的根，就是原方程式的解。

**【範例】：** 解分式方程式  $x + \frac{4}{x} = -4$ 。

**解**：方法一：通分母法。

$$\begin{aligned} x + \frac{4}{x} = -4 &\Leftrightarrow x + \frac{4}{x} + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{x} + \frac{4}{x} + \frac{4x}{x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x + 4}{x} = 0 \end{aligned}$$

令  $x^2 + 4x + 4 = 0$ ， $\therefore x = -2$  (重根)。

方法二：去分母法。

$$\begin{aligned} x + \frac{4}{x} = -4 &\Leftrightarrow x \cdot \left(x + \frac{4}{x}\right) = -4 \cdot x \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4 = -4x \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \end{aligned}$$

$\therefore x = -2$  (重根)。

**【範例】：**解分式方程式  $\frac{x-5}{2x+1} = \frac{x-5}{2x+2}$ 。

**解**：方法一：通分母法。

$$\begin{aligned} \frac{x-5}{2x+1} = \frac{x-5}{2x+2} &\Leftrightarrow \frac{x-5}{2x+1} - \frac{x-5}{2x+2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-5)(2x+2)}{(2x+1)(2x+2)} - \frac{(x-5)(2x+1)}{(2x+1)(2x+2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(2x^2-8x-10)-(2x^2-9x-5)}{(2x+1)(2x+2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-5}{(2x+1)(2x+2)} = 0 \end{aligned}$$

令  $x-5=0$ ， $\therefore$  答： $x=5$ 。

方法二：去分母法。

$$\begin{aligned} \frac{x-5}{2x+1} = \frac{x-5}{2x+2} &\Leftrightarrow (2x+2)(x-5) = (2x+1)(x-5) \\ &\Leftrightarrow 2x^2-8x-10 = 2x^2-9x-5 \\ &\Leftrightarrow x-5=0 \end{aligned}$$

$\therefore$  答： $x=5$ 。

**【範例】：**解分式方程式  $2 - \frac{5}{x-1} = \frac{-3}{x^2-x}$ 。

**解**：方法一：通分母法。

$$\begin{aligned} 2 - \frac{5}{x-1} = \frac{-3}{x^2-x} &\Leftrightarrow 2 - \frac{5}{x-1} - \frac{-3}{x^2-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{x^2-x}{x^2-x} - \frac{5}{x-1} \cdot \frac{x}{x} - \frac{-3}{x^2-x} = 0 \quad (\text{先通分}) \\ &\Leftrightarrow \frac{2x^2-2x}{x^2-x} - \frac{5x}{x^2-x} - \frac{-3}{x^2-x} = 0 \quad (\text{化簡}) \\ &\Leftrightarrow \frac{2x^2-2x-5x+3}{x^2-x} = 0 \quad (\text{化簡}) \\ &\Leftrightarrow \frac{2x^2-7x+3}{x^2-x} = 0 \end{aligned}$$

令  $2x^2-7x+3=0 \Leftrightarrow (x-3)(2x-1)=0$ ， $\therefore$  答： $x=3$  或  $\frac{1}{2}$ 。

方法二：去分母法。

$$\begin{aligned} 2 - \frac{5}{x-1} = \frac{-3}{x^2-x} &\Leftrightarrow 2 \cdot (x^2-x) - \frac{5}{x-1} \cdot (x^2-x) = \frac{-3}{x^2-x} \cdot (x^2-x) \\ &\Leftrightarrow 2x^2-2x-5x = -3 \\ &\Leftrightarrow 2x^2-7x+3=0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)(2x-1)=0 \end{aligned}$$

$\therefore$  答： $x=3$  或  $\frac{1}{2}$ 。

**【範例】：**解分式方程式  $\frac{x(x-1)}{x(x+1)} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)}$ 。

解：方法一：通分母法。

$$\begin{aligned} \frac{x(x-1)}{x(x+1)} &= \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)} \\ \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x(x+1)} \cdot \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)} - \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)} \cdot \frac{x}{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x(x-1)(x+2)(x-3)}{x(x+1)(x+2)(x-3)} - \frac{x(x-1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)(x-3)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x(x-1)(x+2)(x-3) - x(x-1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)(x-3)} &= 0 \cdots \cdots (*) \end{aligned}$$

$$\text{令 } x(x-1)(x+2)(x-3) - x(x-1)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+2)[(x-3)-1] = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+2)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } 1 \text{ 或 } 4 \text{ 或 } -2。$$

$$\therefore 0 \text{ 或 } -2 \text{ 代入 } (*) \text{ 式中會使分母為零，}$$

$$\therefore 0 \text{ 或 } -2 \text{ 不合。}$$

當  $x=1$  或  $x=4$  代入方程式，可以使方程式成立，

所以  $x=1$  或  $x=4$  為其解。

方法二：去分母法。

$$\begin{aligned} \frac{x(x-1)}{x(x+1)} &= \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)} \\ \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x(x+1)} \cdot x(x+1)(x+2)(x-3) &= \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)} \cdot x(x+1)(x+2)(x-3) \\ \Leftrightarrow x(x-1)(x+2)(x-3) &= x(x-1)(x+2) \\ \Leftrightarrow x(x-1)(x+2)(x-3) - x(x-1)(x+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-1)(x+2)[(x-3)-1] &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-1)(x+2)(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } 1 \text{ 或 } -2 \text{ 或 } 4。$$

$$\therefore 0 \text{ 或 } -2 \text{ 代入會使分母為零，}$$

$$\therefore 0 \text{ 或 } -2 \text{ 不合。}$$

當  $x=1$  或  $x=4$  代入方程式，可以使方程式成立，

所以  $x=1$  或  $x=4$  為其解。

**【範例】：**解分式方程式  $\frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{2}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x^2+x}$ 。

**解：**方法一：通分母法。

$$\begin{aligned} \text{原式} &\Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x(x+1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{x(x+3)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{2x(x+2)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{x(x+1)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{(x+2)(x+3)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &\Leftrightarrow \frac{x(x+3)+2x(x+2)+x(x+1)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{(x+2)(x+3)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &\Leftrightarrow \frac{x(x+3)+2x(x+2)+x(x+1)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} - \frac{(x+2)(x+3)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x(x+3)+2x(x+2)+x(x+1)-(x+2)(x+3)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{令 } x(x+3)+2x(x+2)+x(x+1)-(x+2)(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x+2x^2+4x+x^2+x-x^2-5x-6=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+3x-6=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 或 } x=-2$$

當  $x=1$  代入方程式，可以使方程式成立，但當  $x=-2$  代入方程式，會使分母為 0，必須捨棄，所以  $x=1$  為其解。

方法二：去分母法。

$$\text{原式} \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

等號兩邊同乘以  $x(x+1)(x+2)(x+3)$ 。

$$\Leftrightarrow x(x+3)+2x(x+2)+x(x+1)=(x+2)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow x(x+3)+2x(x+2)+x(x+1)-(x+2)(x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x+2x^2+4x+x^2+x-x^2-5x-6=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+3x-6=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 或 } x=-2$$

當  $x=1$  代入方程式，可以使方程式成立，但當  $x=-2$  代入方程式，會使分母為 0，必須捨棄，所以  $x=1$  為其解。

**e. 應用問題的解題步驟：**

- (1) 認清題意：找出題中的已知數與未知數，更重要的是要看出已知數與未知數之間的關係。
- (2) 選設未知數：在所有的未知數中，選定一個較適當的，設其為  $x$ 、 $y$ …等。
- (3) 列出方程式：依題意利用選設的未知數去列方程式。
- (4) 解方程式：解所有的方程式。
- (5) 驗算解答：所求得的解，並不一定能符合題意，必須再檢驗一下它們是否合理，把不合理的根捨棄。

**【範例】：**有三個連續正偶數，若第一與第二兩數的乘積加第二與第三兩數的乘積等於 128，則最大數為？

**解**：設三個連續正偶數為  $x-2$ ， $x$ ， $x+2$

$$\therefore (x-2) \times x + x \times (x+2) = 128$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + x^2 + 2x = 128$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 128$$

$$\Rightarrow x^2 = 64$$

$$\Rightarrow x = \pm 8$$

$\therefore$  是連續正偶數，

$\therefore x = -8$  不合。即  $x = 8$ ，則最大數為 10。

答：最大數為 10。

**【範例】：**已知  $\overline{AB} = 12 \text{ cm}$ ，在  $\overline{AB}$  上取一點  $P$  ( $\overline{AP} < \overline{BP}$ ) 分別以  $\overline{AP}$ 、 $\overline{BP}$  為邊作兩正方形，若兩正方形面積和為  $90 \text{ cm}^2$ ，求  $\overline{AP}$ 、 $\overline{BP}$  各多少  $\text{cm}$ ？

**解**：設  $\overline{AP} = x$ ， $\overline{BP} = 12 - x$

$$\therefore x^2 + (12 - x)^2 = 90$$

$$\Rightarrow x^2 + 144 - 24x + x^2 = 90$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 24x + 54 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x + 27 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-9) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ 或 } x = 9$$

即  $\overline{AP} = 3$ ， $\overline{BP} = 9$  ( $\because \overline{AP} < \overline{BP}$ )

答： $\overline{AP}$  為  $3 \text{ cm}$ ， $\overline{BP}$  為  $9 \text{ cm}$ 。



## 小 試 身 手

### 【例題一】

設  $a, b$  為  $x^2+4x-9=0$  之二根，

求：(1)  $a+b$       (2)  $ab$   
 (3)  $a^2+b^2$       (4)  $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 。

解：(1)  $a+b=-4$

(2)  $ab=-9$

(3)  $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$   
 $=(-4)^2-2\times(-9)=34$

(4)  $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{b^2+a^2}{ab}=\frac{34}{-9}$

### 【例題二】

設  $\alpha, \beta$  為  $x^2+2x-5=0$  之二根，

求：(1)  $\alpha^2+\beta^2$       (2)  $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$   
 (1)  $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$       (4)  $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$ 。  
 (5)  $\alpha^3+\beta^3$       (6)  $(\alpha-1)(\beta-1)$   
 (7)  $(2\alpha+\beta)(2\beta+\alpha)$   
 (8)  $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$

解：(1)  $\because \alpha+\beta=-2, \alpha\beta=-5$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$   
 $=(-2)^2-2\times(-5)=14$

(2)  $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\frac{14}{-5}$

(3)  $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=10$

(4)  $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{14}{25}$

(5)  $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$   
 $=-2\times(14+5)=-38$

(6)  $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$   
 $=-5+2+1=-2$

(7)  $(2\alpha+\beta)(2\beta+\alpha)$   
 $=4\alpha\beta+2(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta$   
 $=-20+28-5=3$

(8)  $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$   
 $=(\alpha^2)^2+2\alpha^2\beta^2+(\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2$   
 $=(\alpha^2+\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2=196-25=171$

### 【練習一】

設  $a, b$  為  $x^2-6x+2=0$  之二根，

求：(1)  $a+b$       (2)  $ab$   
 (3)  $a^2+b^2$       (4)  $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 。

解：(1)  $a+b=6$

(2)  $ab=2$

(3)  $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$   
 $=6^2-2\times 2=32$

(4)  $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{b^2+a^2}{ab}=\frac{32}{2}=16$

### 【練習二】

- (1) 設  $\alpha, \beta$  為  $x^2-2x+k=0$  之二根，  
 且  $\alpha+\beta$  是  $\alpha, \beta$  的比例中項，求  $k=?$   
 (2) 若  $\alpha, \beta$  為  $x^2-6x+4=0$  之二根，  
 求  $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=?$

解：(1)  $\because \alpha, \beta$  為  $x^2-2x+k=0$  之二根

$\therefore \alpha+\beta=2, \alpha\beta=k$

且  $\alpha+\beta$  是  $\alpha, \beta$  的比例中項

$\therefore (\alpha+\beta)^2=\alpha\beta$

$\Rightarrow 4=k \quad \therefore k=4$

(2)  $\because \alpha, \beta$  為  $x^2-6x+4=0$  之二根

$\therefore \alpha+\beta=6, \alpha\beta=4$

$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\times\sqrt{\beta}$

$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=6+2\times 2=10$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{10}$



**【例題三】**

若一個二次方程式之二根為  $3-2\sqrt{2}$ ，  
 $3+2\sqrt{2}$ ，求此二次方程式。

$$\begin{aligned} \text{解：} \because (3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2}) &= 6 \\ (3-2\sqrt{2}) \times (3+2\sqrt{2}) &= 1 \\ \therefore x^2 - 6x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

**【練習三】**

若一個二次方程式之二根為  $-2-\sqrt{3}$ ，  
 $-2+\sqrt{3}$ ，求此二次方程式。

$$\begin{aligned} \text{解：} \because (-2-\sqrt{3})+(-2+\sqrt{3}) &= -4 \\ (-2-\sqrt{3}) \times (-2+\sqrt{3}) &= 1 \\ \therefore x^2 + 4x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

**【例題四】**

若一個二次方程式之二根為  $\frac{3\pm\sqrt{7}}{3}$ ，求此二  
次方程式。

$$\begin{aligned} \text{解：} \because \frac{3+\sqrt{7}}{3} + \frac{3-\sqrt{7}}{3} &= 2 \\ \frac{3+\sqrt{7}}{3} \times \frac{3-\sqrt{7}}{3} &= \frac{2}{9} \\ \therefore x^2 - 2x + \frac{2}{9} &= 0 \\ \text{即 } 9x^2 - 18x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

**【練習四】**

若一個二次方程式之二根為  $\frac{5\pm\sqrt{3}}{2}$ ，求此二次  
方程式。

$$\begin{aligned} \text{解：} \because \frac{5+\sqrt{3}}{2} + \frac{5-\sqrt{3}}{2} &= 5 \\ \frac{5+\sqrt{3}}{2} \times \frac{5-\sqrt{3}}{2} &= \frac{22}{4} = \frac{11}{2} \\ \therefore x^2 - 5x + \frac{11}{2} &= 0 \\ \text{即 } 2x^2 - 10x + 11 &= 0 \end{aligned}$$

**【例題五】**

若  $x$  的二次方程式  $x^2+6x+a=0$   
有一根為  $\sqrt{7}-3$ ，則(1)  $a=?$

(2) 求  $x^2+ax-4=0$  的解。

$$\begin{aligned} \text{解：(1) } \because \text{有一根為 } \sqrt{7}-3, \\ \therefore \text{有另一根為 } -\sqrt{7}-3 \\ \therefore (\sqrt{7}-3)+(-\sqrt{7}-3) &= -6 \\ (\sqrt{7}-3) \times (-\sqrt{7}-3) &= 2 \\ \therefore x \text{ 的二次方程式為 } x^2+6x+2 &= 0 \\ \therefore a &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) } x^2+2x-4 &= 0 \\ D &= 2^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 20 \\ \therefore x &= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2 \times 1} = -1 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

**【練習五】**

若  $x$  的二次方程式  $x^2+(a-1)x-a=0$ ，  
( $a \neq 0$ )，有一解為  $a$ ，則(1)  $a=?$

(2) 求另一解？

$$\begin{aligned} \text{解：(1) 將 } x=a \text{ 代入 } x^2+(a-1)x-a &= 0 \\ \therefore a^2+(a-1)a-a &= 0 \\ \Rightarrow 2a^2-2a=0 \quad \therefore a(a-1) &= 0 \\ \therefore a=0 \text{ (不合) 或 } a=1 \\ \therefore x^2-1=0 \quad \therefore x=1 \text{ 或 } -1 \\ \therefore \text{另一解為 } -1 \end{aligned}$$

**【例題六】**

若  $x$  的二次方程式  $x^2+10x-50=0$  的兩根為  $\alpha$ 、 $\beta$ ，求以  $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$  為兩根之方程式。

解： $\because \alpha+\beta=-10, \alpha\beta=-50$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{1}{5},$$

$$\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{-50}$$

$\therefore$  以  $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$  為兩根之方程式為

$$x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{-50} = 0$$

$$\Rightarrow 50x^2 - 10x - 1 = 0$$

**【練習六】**

若  $x$  的二次方程式  $x^2+3x-2=0$  的兩根為  $\alpha$ 、 $\beta$ ，求以  $3\alpha, 3\beta$  為兩根之方程式為  $3x^2+ax+b=0$ ，求  $a+b=?$

解： $\because \alpha+\beta=-3, \alpha\beta=-2$

$$\therefore 3\alpha+3\beta=-9,$$

$$3\alpha \times 3\beta = -18$$

$\therefore$  以  $3\alpha, 3\beta$  為兩根之方程式為

$$x^2+9x-18=0$$

$$\Rightarrow 3x^2+27x-54=0$$

$$\therefore a=27, b=-54$$

$$\therefore a+b=-27$$

**【例題七】**

設  $x$  的二次方程式  $x^2+2x+m+5=0$  兩根皆為負數，求  $m$  之值。

解： $\because D=b^2-4ac=2^2-4 \times 1 \times (m+5)$   
 $=-4m-16 \geq 0$

$$\therefore m \leq -4$$

又兩根之積為  $m+5 > 0$

$$\therefore m > -5$$

$$\Rightarrow -5 < m \leq -4$$

**【練習七】**

設  $x$  的二次方程式  $x^2-5x+m-5=0$  兩根皆為正數，求  $m$  之值。

解： $\because D=b^2-4ac=(-5)^2-4 \times 1 \times (m-5)$   
 $=-4m+45 \geq 0$

$$\therefore m \leq \frac{45}{4}$$

又兩根之積為  $m-5 > 0$

$$\therefore m > 5$$

$$\Rightarrow 5 < m \leq \frac{45}{4}$$

## 【例題八】

若  $x$  的二次方程式

$$2mx^2 - (3m+2)x + m+1 = 0,$$

其根具有下列各關係，試求  $m$  之值。

- (1) 兩根之和為 2。(2) 一根為 0。  
 (3) 兩根互為倒數。(4) 兩根為同值異號。  
 (5) 一根為 -1。(6) 兩根之差為 2。

解：(1)  $\because$  兩根之和為  $2 = \frac{3m+2}{2m}$

$$\therefore 4m = 3m + 2$$

$$\therefore m = 2$$

(2)  $\because$  一根為 0  $\therefore m+1=0$

$$\therefore m = -1$$

(3)  $\because$  兩根互為倒數  $\therefore \frac{m+1}{2m} = 1$

$$\therefore 2m = m + 1$$

$$\therefore m = 1$$

(4)  $\because$  兩根為同值異號

$$\therefore \frac{3m+2}{2m} = 0 \quad \therefore 3m+2=0$$

$$\therefore m = -\frac{2}{3}$$

(5)  $\because$  一根為 -1

$$\therefore 2m + (3m+2) + m + 1 = 0$$

$$\therefore 6m = 3 \quad \therefore m = \frac{1}{2}$$

(6)  $\because$  兩根之差為 2

$$\therefore \text{設兩根為 } \alpha, \alpha+2$$

$$\therefore \alpha + \alpha + 2 = \frac{3m+2}{2m} \dots\dots\dots ①$$

$$\alpha(\alpha+2) = \frac{m+1}{2m} \dots\dots\dots ②$$

由①得  $\alpha = \frac{2-m}{4m}$  代入②

$$\text{得到 } \frac{2-m}{4m} \left( \frac{2-m}{4m} + 2 \right) = \frac{m+1}{2m}$$

$$\therefore m = \frac{2}{3} \text{ 或 } m = -\frac{2}{5}$$

## 【練習八】

若  $x$  的二次方程式

$$x^2 + (k+2)x + k+5 = 0,$$

其根具有下列各關係，試求  $k$  之值。

- (1) 兩根為相反數。(2) 兩根相等。  
 (3) 一根為 0。(4) 兩根互為倒數。  
 (5) 一根為 3。(6) 兩根之差為 4。

解：(1)  $\because$  兩根為相反數

$$\therefore k+2=0 \quad \therefore k=-2$$

(2)  $\because$  兩根相等

$$\therefore (k+2)^2 - 4 \times 1 \times (k+5) = 0$$

$$\therefore k^2 + 4k + 4 - 4k - 20 = 0$$

$$\therefore k = \pm 4$$

(3)  $\because$  一根為 0  $\therefore k+5=0$

$$\therefore k = -5$$

(4)  $\because$  兩根互為倒數

$$\therefore k+5=1 \quad \therefore k=-4$$

(5)  $\because$  一根為 3

$$\therefore 9 + (k+2) \times 3 + k + 5 = 0$$

$$\therefore 4k = -20 \quad \therefore k = -5$$

(6)  $\because$  兩根之差為 4

$$\therefore \text{設兩根為 } \alpha, \alpha+4$$

$$\therefore \alpha + \alpha + 4 = -(k+2) \dots\dots\dots ①$$

$$\alpha(\alpha+4) = k+5 \dots\dots\dots ②$$

由①得  $\alpha = \frac{-k-6}{2}$  代入②

$$\text{得到 } \frac{-k-6}{2} \left( \frac{-k-6}{2} + 4 \right) = k+5$$

$$\therefore k = \pm 4\sqrt{2}$$

## 【例題九】

設  $x$  的二次方程式

$$(k+1)x^2 + (k^2-1)x + (k^2+2k-3) = 0,$$

- (1) 若方程式之一根為 0，另一根不為 0，求  $k$  之值及另一根(即恰有一零根)
- (2) 若方程式之兩根互為相反數，求  $k$  之值。
- (3) 若方程式之兩根均不為 0，則  $k$  之值有何限制？

解：(1)  $\because$  恰有一根為 0

$$\therefore k+1 \neq 0, \Rightarrow k \neq -1$$

$$k^2-1 \neq 0, \Rightarrow k \neq 1 \text{ 且 } k \neq -1$$

$$k^2+2k-3=0 \Rightarrow (k-1)(k+3)=0$$

$$\therefore k=1 \text{ 或 } k=-3$$

$$\Rightarrow k=-3$$

(2)  $\because$  兩根互為相反數

$$\therefore \frac{k^2-1}{k+1} = 0$$

$$\therefore k=1 \text{ 或 } k=-1 \quad \text{但 } k \neq -1$$

$$\therefore k=1$$

(3)  $\because$  若方程式之兩根均不為 0

$$\therefore k^2+2k-3 \neq 0 \text{ 且 } k+1 \neq 0$$

$$\Rightarrow k \neq -3 \text{ 且 } k \neq 1 \text{ 且 } k \neq -1$$

## 【練習九】

設  $x$  的二次方程式

$$kx^2 + 2(k+1)x + (k^2+3k+2) = 0,$$

- (1) 有一根為 0，求  $k$  之值。
- (2) 恰有一根為 0，求  $k$  之值及另一根。
- (3) 有兩零根，求  $k$  之值。

解：(1)  $\because$  有一根為 0

$$\therefore k^2+3k+2=0$$

$$\Rightarrow (k+1)(k+2)=0$$

$$\therefore k=-1 \text{ 或 } k=-2$$

(2)  $\because$  恰有一根為 0

$$\therefore k+1 \neq 0 \quad \therefore k \neq -1$$

$$\therefore k^2+3k+2=0$$

$$\Rightarrow (k+1)(k+2)=0$$

$$\therefore k=-1 \text{ 或 } k=-2$$

$$\Rightarrow k=-2$$

(3)  $\because$  有兩零根

$$\therefore k+1=0 \quad \therefore k=-1$$

$$\therefore k^2+3k+2=0$$

$$\Rightarrow (k+1)(k+2)=0$$

$$\therefore k=-1 \text{ 或 } k=-2$$

$$\Rightarrow k=-1$$

## 【例題十】

利用配方法，求一元二次式： $ax^2+bx+c=0$ ，若有兩相異根時， $a$ 、 $b$ 、 $c$  的關係為何？

解： $\because ax^2+bx+c=0$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\because$  兩相異根  $\therefore b^2-4ac > 0$

## 【練習十】

方程式  $ax^2+bx+c=0$  可以配方成  $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ ，若方程式無解，

則  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的關係為何？答：\_\_\_\_\_。

解： $\because ax^2+bx+c=0$

$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$

$\because$  方程式無解  $\therefore b^2-4ac<0$

## 【例題十一】

一個果園中，種 600 棵楊桃樹，每行所種的棵數，比行數的 2 倍少 10，問每行種幾棵？

解：設共有  $x$  行，每行種的棵數為  $2x-10$

$$\therefore x(2x-10)=600$$

$$\Rightarrow 2x^2-10x-600=0$$

$$\Rightarrow x^2-5x-300=0$$

$$\Rightarrow (x-20)(x+15)=0$$

$$\therefore x=20 \text{ 或 } -15 \text{ (不合)}$$

$$\therefore \text{每行種 } 30 \text{ 棵}$$

答：每行種 30 棵。

## 【例題十二】

兩整數的差為 13，積為  $-42$ ，求此兩數。

解：設兩數為  $x$ 、 $13+x$ ，

$$\text{則 } x(13+x)=-42，$$

$$\Rightarrow 13x+x^2=-42，$$

$$\Rightarrow x^2+13x+42=0$$

$$\Rightarrow (x+7)(x+6)=0，x=-7 \text{ 或 } -6$$

$$\therefore \text{當 } x=-6，\text{另一數為 } 7；$$

$$x=-7，\text{另一數為 } 6$$

答： $-6, 7$ ； $-7, 6$ 。

## 【練習十一】

某電影院每張票 80 元，觀眾有 1000 人，若票價每減 2 元，則觀眾就增加 30 人，問：每張票價應訂多少元方能使收入為 79625 元。

解：設票價減少  $2x$  元

則觀眾就增加  $30x$  人

$$\therefore (80-2x)(1000+30x)=79625$$

$$80000+2400x-2000x-60x^2=79625$$

$$60x^2-400x-375=0$$

$$(2x-15)(6x+5)=0$$

$$\therefore x=\frac{15}{2} \text{ 或 } -\frac{5}{6} \text{ (不合)}$$

$$80-2 \times \frac{15}{2}=65$$

答：65 元。

## 【練習十二】

若兩整數和為 11，積為  $(-60)$ ，則此兩整數為\_\_\_\_\_。

解：設兩數為  $x$ 、 $11-x$ ，

$$\text{則 } x(11-x)=-60$$

$$\Rightarrow 11x-x^2=-60$$

$$\Rightarrow x^2-11x-60=0$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-15)=0$$

$$\therefore x=-4 \text{ 或 } 15$$

$$\therefore \text{當 } x=-4，\text{另一數為 } 15；$$

$$x=15，\text{另一數為 } -4$$

答： $-4, 15$ ； $15, -4$ 。

**【例題十三】**

某零售商用 1800 元買進玻璃杯若干個，因其中 2 個損壞無法出售，其餘的每個以比成本多 5 元的價格出售，若全部賣完可賺 400 元，問玻璃杯每個成本是多少元？原來買進幾個玻璃杯？

解：設原來買進  $x$  個玻璃杯

$$\begin{aligned} \therefore \left( \frac{1800}{x} + 5 \right) (x-2) &= 1800 + 400 \\ \Rightarrow 1800 + 5x - \frac{3600}{x} - 10 &= 2200 \\ \Rightarrow 5x - \frac{3600}{x} &= 410 \\ \Rightarrow 5x^2 - 410x - 3600 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 - 82x - 720 &= 0 \\ \Rightarrow (x+8)(x-90) &= 0 \\ \therefore x = -8 \text{ (不合) 或 } 90 \end{aligned}$$

玻璃杯每個成本是  $\frac{1800}{90} = 20$  元

答：玻璃杯每個成本是 20 元；  
原來買進 90 個玻璃杯。

**【例題十四】**

某旅行社招攬旅行團，預定 40 人，每人收費 15,000 元，其中成本為 10,000 元。若增加 1 人，則每人減收 100 元。若此活動旅行團欲賺取 202,500 元，則旅行社總收入多少元？

解：設增加  $x$  人

$$\begin{aligned} \therefore (15000 - 100x)(40 + x) &= 202500 + 10000(40 + x) \\ \Rightarrow 600000 + 11000x - 100x^2 &= 602500 + 10000x \\ \Rightarrow 100x^2 - 1000x + 2500 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 - 10x + 25 &= 0 \\ \Rightarrow (x-5)^2 &= 0 \\ \therefore x &= 5 \end{aligned}$$

則旅行社總收入為

$$202500 + 10000 \times (40 + 5) = 652500 \text{ 元}$$

答：旅行社總收入為 652500 元。

**【練習十三】**

某商店一個賣價 100 元的某商品，通常一天可以賣 400 個，若此商品每加價 1 元，則每天少賣 2 個，某日該商品店此商品共賣得 45000 元，問該日此商品一個賣價為多少元？

解：設該日每個加價  $x$  元

$$\begin{aligned} \therefore (100 + x)(400 - 2x) &= 45000 \\ \Rightarrow 40000 + 200x - 2x^2 &= 45000 \\ \Rightarrow 2x^2 - 200x + 5000 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 - 100x + 2500 &= 0 \\ \Rightarrow (x-50)(x-50) &= 0 \\ \therefore x &= 50 \text{ 或 } 50 \\ \therefore 100 + 50 &= 150 \end{aligned}$$

答：該日此商品一個賣價為 150 元。

**【練習十四】**

建華召集了幾個同學，一起分攤一位貧困同學因受傷住院的醫藥費 1600 元，後來另有 10 位同學聞訊也參加這個義舉，因而使每位同學比原先預計的少負擔 80 元，問原來參加分攤費用的同學有幾人？

解：設原來參加分攤費用的同學有  $x$  人

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1600}{x} &= \frac{1600}{x+10} + 80 \\ \Rightarrow \frac{20}{x} &= \frac{20}{x+10} + 1 \\ \Rightarrow 20(x+10) &= 20x + x(x+10) \\ \Rightarrow 20x + 200 &= 20x + x^2 + 10x \\ \Rightarrow x^2 + 10x - 200 &= 0 \\ \Rightarrow (x+20)(x-10) &= 0 \\ \therefore x &= -20 \text{ (不合) 或 } 10 \end{aligned}$$

答：原來參加分攤費用的同學有 10 人。

## 【例題十五】

五個連續奇數由小而大的依序為  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$ ，若  $a^2 + e^2$  比  $b^2 + c^2$  的 2 倍小 66，請問： $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$  各為多少？

(有兩組解)

$$\begin{aligned} \text{解：設 } b &= a+2, \quad c = a+4, \\ d &= a+6, \quad e = a+8 \\ \therefore a^2 + e^2 &= 2(b^2 + c^2) - 66 \\ \Rightarrow a^2 + (a+8)^2 &= 2(a+2)^2 + 2(a+4)^2 - 66 \\ \Rightarrow a^2 + a^2 + 16a + 64 &= 2(a^2 + 4a + 4) + \\ & 2(a^2 + 8a + 16) - 66 \\ \Rightarrow 2a^2 + 16a + 64 &= 4a^2 + 24a - 26 \\ \Rightarrow 2a^2 + 8a - 90 &= 0 \\ \Rightarrow a^2 + 4a - 45 &= 0 \\ \Rightarrow (a+9)(a-5) &= 0 \\ \therefore a &= -9 \text{ (不合) 或 } 5 \\ \therefore a、b、c、d、e &\text{ 各為 } 5, 7, 9, 11, 13 \\ \text{答：} a、b、c、d、e &\text{ 各為 } 5, 7, 9, 11, 13 \end{aligned}$$

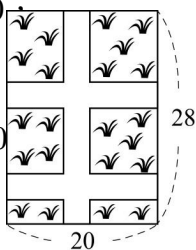
## 【例題十六】

一矩形草地，長 20 公尺、寬 28 公尺，在內部開闢三條等寬道路，如附圖所示，使剩餘草地面積為 320 平方公尺，求路寬。

解：設路寬  $x$  m，

$$\begin{aligned} \text{則：} 20 \times x \times 2 + 28 \times x - 2x^2 &= 20 \times 28 - 320 \\ \Rightarrow 40x + 28x - 2x^2 &= 240 \\ \Rightarrow 2x^2 - 68x + 240 &= 0, \\ \Rightarrow x^2 - 34x + 120 &= 0, \\ \therefore (x-4)(x-30) &= 0 \\ \therefore x &= 4 \text{ 或 } 30 \text{ (不合)} \end{aligned}$$

答：路寬 4m。



## 【練習十五】

已知三個連續奇數的平方和為 515，則此三連續奇數為？

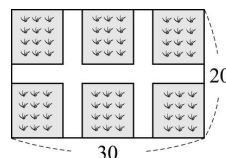
解：設三個連續奇數為  $a-2$ ， $a$ ， $a+2$

$$\begin{aligned} \therefore (a-2)^2 + a^2 + (a+2)^2 &= 515 \\ \Rightarrow a^2 - 4a + 4 + a^2 + a^2 + 4a + 4 &= 515 \\ \Rightarrow 3a^2 + 8 &= 515 \\ \Rightarrow 3a^2 &= 507 \Rightarrow a^2 = 169 \\ \Rightarrow \therefore a &= -3 \text{ (不合) 或 } 3 \\ \therefore \text{三連續奇數為 } &3, 5, 7 \end{aligned}$$

答：三連續奇數為 3，5，7。

## 【練習十六】

一矩形草地，長 30 公尺，寬 20 公尺。在其內部開闢三條等寬的通路，如附圖所示，而所剩下之草地面積是 468 平方公尺，則這通路的寬是 4 公尺。



解：設路寬  $x$  m，

$$\begin{aligned} \text{則：} (30-2x)(20-x) &= 468 \\ \Rightarrow 600 - 70x + 2x^2 &= 468 \\ \Rightarrow 2x^2 - 70x + 132 &= 0, \\ \Rightarrow x^2 - 35x + 66 &= 0, \\ \therefore (x-2)(x-33) &= 0 \\ \therefore x &= 2 \text{ 或 } 33 \text{ (不合)} \end{aligned}$$

答：路寬 2m。

**【例題十七】**

某矩形之長為  $(5x+4)$ cm，寬為  $(x-3)$ cm  
且面積為  $24\text{cm}^2$ ，則周長為？

解： $\because (5x+4)(x-3)=24$

$$\therefore 5x^2 - 11x - 12 = 24,$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 11x - 36 = 0$$

$$\therefore (x-4)(5x+9) = 0$$

$$\therefore x=4 \text{ 或 } -\frac{9}{5} \text{ (不合)}$$

$$\therefore \text{周長為 } 2(6x+1) = 2 \times 25 = 50$$

答：周長為 50cm。

**【練習十七】**

一矩形的長為  $(3x-1)$  公尺，寬為  $(x+2)$   
公尺，且其面積為 98 平方公尺，則寬為？

解： $\because (3x-1)(x+2)=98$

$$\therefore 3x^2 + 5x - 2 = 98,$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 5x - 100 = 0$$

$$\therefore (x-5)(3x+20) = 0$$

$$\therefore x=5 \text{ 或 } -\frac{20}{3} \text{ (不合)}$$

$$\therefore \text{寬為 } (x+2) = 7$$

答：寬為 7cm。

**【例題十八】**

設  $x-2y=3$ ，

求  $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 6 = \underline{\quad 0 \quad}$ 。

解： $\because x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 6$

$$= (x-2y)^2 - 5(x-2y) + 6$$

$$= 9 - 5 \times 3 + 6 = 0$$

**【練習十八】**

設  $x+3y=-2$ ，

求  $x^2 + 6xy + 9y^2 + x + 3y - 6 = \underline{\quad -4 \quad}$ 。

解： $\because x^2 + 6xy + 9y^2 + x + 3y - 6$

$$= (x+3y)^2 + (x+3y) - 6$$

$$= 4 - 2 - 6 = -4$$

**【例題十九】**

若  $0 < x < 1$ ，且  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ，

求：(1)  $x + \frac{1}{x}$  (2)  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 。

解：(1)  $\because 2x^2 - 5x + 2 = 0$

$$\therefore 2x - 5 + \frac{2}{x} = 0$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

$$(2) x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \times \frac{1}{x}$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 = \frac{17}{4}$$

**【練習十九】**

若  $0 < x < 1$ ，且  $3x^2 - 10x + 3 = 0$ ，

求：(1)  $x + \frac{1}{x}$  (2)  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 。

解：(1)  $\because 3x^2 - 10x + 3 = 0$

$$\therefore 3x - 10 + \frac{3}{x} = 0$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$$

$$(2) x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \times \frac{1}{x}$$

$$= \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 2 = \frac{82}{9}$$



## 【例題二十】

(1) 若  $\frac{x-2}{x+1} - 4 \times \frac{x+1}{x-2} = 3$ ，求  $\frac{x-2}{x+1}$  與  $x$ 。

(2) 解  $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-9} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-7}$ 。

解：(1) 設  $A = \frac{x-2}{x+1}$   $\therefore A - \frac{4}{A} = 3$

$$\Rightarrow A^2 - 3A - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (A+1)(A-4) = 0$$

$$\therefore A = \frac{x-2}{x+1} = -1 \text{ 或 } 4$$

$$\text{當 } \frac{x-2}{x+1} = -1 \Rightarrow x-2 = -x-1$$

$$\Rightarrow 2x = 1 \quad \therefore x = \frac{1}{2}$$

$$\text{當 } \frac{x-2}{x+1} = 4 \Rightarrow x-2 = 4x+4$$

$$\Rightarrow 3x = -6 \quad \therefore x = -2$$

## 【練習二十】

(1) 解  $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x} = \frac{13}{6}$ 。

(2)  $\frac{1}{x^2+2x-1} + \frac{2}{x^2+2x+1} - \frac{5}{x^2+2x+2} = 0$ ，求  $x^2+2x = ?$   $x = ?$

解：

(1) 設  $A = \frac{x}{x^2-1}$   $\therefore A + \frac{1}{A} = \frac{13}{6}$

$$\Rightarrow 6A^2 - 13A + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (2A-3)(3A-2) = 0$$

$$\therefore A = \frac{x}{x^2-1} = \frac{3}{2} \text{ 或 } \frac{2}{3}$$

$$\text{當 } \frac{x}{x^2-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x = 3x^2 - 3$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 40$$

$\therefore$  則此方程式的兩根為

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{40}}{2 \times 3} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}$$

$$\text{當 } \frac{x}{x^2-1} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = 2x^2 - 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(2x+1) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 或 } -\frac{1}{2}$$

(2)  $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-9} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-7}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} = \frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-9}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)-(x-1)}{(x-3)(x-1)} = \frac{(x-9)-(x-7)}{(x-7)(x-9)}$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{(x-3)(x-1)} = \frac{-2}{(x-7)(x-9)}$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-1) = (x-7)(x-9)$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = x^2 - 16x + 63$$

$$\Rightarrow 12x = 60 \quad \therefore x = 5$$

(2)  $\frac{1}{x^2+2x-1} + \frac{2}{x^2+2x+1} - \frac{5}{x^2+2x+2} = 0$   
 設  $A = x^2 + 2x$

$$\therefore \frac{1}{A-1} + \frac{2}{A+1} - \frac{5}{A+2} = 0$$

$$\frac{(A+1)(A+2) + 2(A-1)(A+2) - 5(A-1)(A+1)}{(A-1)(A+1)(A+2)} =$$

0

$$\Rightarrow A^2 + 3A + 2 + 2A^2 + 2A - 4 - 5A^2 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 2A^2 - 5A - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (A-3)(2A+1) = 0$$

$$\therefore A = x^2 + 2x = 3 \text{ 或 } -\frac{1}{2}$$

$$\text{當 } x^2 + 2x = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+3) = 0 \quad \therefore x = 1 \text{ 或 } -3$$

$$\text{當 } x^2 + 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\therefore b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 2 \times 1 = 8$$

$\therefore$  則此方程式的兩根為

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2 \times 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

## 【例題二十一】

山路長  $4\text{Km}$ ，某人下山的速率每小時比上山快  $1\text{Km}$ ，已知上山和下山來回一趟行走的時間共費  $6$  小時，求上山、下山的速率各為多少？

解：設上山的速率每小時  $x\text{Km}$

下山的速率每小時  $(x+1)\text{Km}$

$$\therefore \frac{4}{x} + \frac{4}{x+1} = 6$$

$$\Rightarrow 2(x+1) + 2x = 3x(x+1)$$

$$\Rightarrow 2x+2+2x = 3x^2+3x$$

$$\Rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(3x+2) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 或 } -\frac{2}{3} \text{ (不合)}$$

$\therefore$  上山的速率每小時  $1\text{Km}$

下山的速率每小時  $2\text{Km}$

答：上山的速率每小時  $1\text{Km}$

下山的速率每小時  $2\text{Km}$ 。

## 【練習二十一】

一工程車的後車輪周長  $x$  公尺，若前車輪的周長比後車輪的周長少  $2$  公尺，而且每公里前輪比後輪多轉  $25$  圈，求後車輪周長？

解：設後車輪周長為  $x$  公尺

則前車輪的周長為  $(x-2)$  公尺

$$\therefore \frac{1000}{x-2} = \frac{1000}{x} + 25$$

$$\Rightarrow 1000x = 1000(x-2) + 25x(x-2)$$

$$\Rightarrow 1000x = 1000x - 2000 + 25x^2 - 50x$$

$$\Rightarrow 25x^2 - 50x - 2000 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 80 = 0$$

$$\Rightarrow (x-10)(x+8) = 0$$

$$\therefore x=10 \text{ 或 } -8 \text{ (不合)}$$

$\therefore$  前車輪的周長為  $8$  公尺

後車輪周長為  $10$  公尺

答：前車輪的周長為  $8$  公尺

後車輪周長為  $10$  公尺。

## 【例題二十二】

設  $a > b$ ，且  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 3$ ，求  $\frac{b}{a} = ?$

解：設  $x = \frac{b}{a}$   $\therefore x + \frac{1}{x} = 3$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5$$

$\therefore$  則此方程式的兩根為

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\therefore a > b$

$$\therefore (1) a > b > 0, \text{ 則 } \frac{b}{a} < 1, x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$(2) 0 > a > b, \text{ 則 } \frac{b}{a} > 1, x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

## 【練習二十二】

設  $a > b$ ，且  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 1 = 5$ ，求  $\frac{b}{a} = ?$

解：設  $x = \frac{b}{a}$   $\therefore x + \frac{1}{x} = 6$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 32$$

$\therefore$  則此方程式的兩根為

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{32}}{2 \times 1} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$\therefore a > b$

$$\therefore (1) a > b > 0, \text{ 則 } \frac{b}{a} < 1, x = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$(2) 0 > a > b, \text{ 則 } \frac{b}{a} > 1, x = 3 + 2\sqrt{2}$$

## 【例題二十三】

有一工程，甲、乙二人合作需 12 天完工，已知甲獨作比乙獨作多 10 天完工，求甲、乙二人獨作各需幾天完工？

解：設甲、乙二人獨作各需  $(x+10)$  天， $x$  天完工

$$\therefore \frac{1}{x+10} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow 12x + 12(x+10) = x(x+10)$$

$$\Rightarrow 12x + 12x + 120 = x^2 + 10x$$

$$\Rightarrow x^2 - 14x - 120 = 0$$

$$\Rightarrow (x-20)(x+6) = 0$$

$$\therefore x = 20 \text{ 或 } -6 \text{ (不合)}$$

$\therefore$  甲、乙二人獨作各需 30 天，20 天完工

答：甲、乙二人獨作各需 30 天，20 天完工。

## 【練習二十三】

有一工程，甲獨作比乙獨作早 6 天完工，甲、乙二人合作則 4 天完工，問甲、乙二人獨作各需幾天完工？

解：設甲、乙二人獨作各需  $(x-6)$  天， $x$  天完工

$$\therefore \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4x + 4(x-6) = x(x-6)$$

$$\Rightarrow 4x + 4x - 24 = x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-12) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ (不合) 或 } 12$$

$\therefore$  甲、乙二人獨作各需 6 天，12 天完工

答：甲、乙二人獨作各需 6 天，12 天完工。